

Automatyka i robotyka

WYKŁAD
OPIS UKŁADÓW W PRZESTRZENI STANU

Edward Tertel
dr inż.

Przestrzeń stanu

Złożone obiekty sterowania zazwyczaj mają kilka wejść i kilka wyjść, pomiędzy którymi mogą występować złożone sprzężenia. Aby dla takich obiektów przeprowadzić analizę układów sterowania, istotne staje się zredukowanie złożoności wyrażen matematycznych i uporządkowanie ich celem wykonania koniecznych i często żmudnych przekształceń.

Opis takich układów metodami konwencjonalnymi byłby bardzo trudny ze względu na złożoność opisu matematycznego.

Z tego powodu do opisu dynamiki układów wielowymiarowych stosuje się pojęcia **przestrzeni stanu** i **zmiennych stanu**.

Metody opisu własności układu dynamicznego (liniowego):

- A. Równanie różniczkowe.
- B. Transmitancja operatorowa i widmowa, - rachunek operatorowy.
- C. Model wejściowo-wyjściowy:
 - charakterystyki statyczne,
 - charakterystyki dynamiczne,
 - czasowe (odpowiedzi na wymuszenie skokowe i impulsowe),
 - częstotliwościowe (odpowiedzi na wymuszenia harmoniczne).

Powyższe metody należą do konwencjonalnej teorii sterowania i znajduje zastosowanie przy analizie układów jednowymiarowych.

Przestrzeń stanu

Stosując opis układów z wykorzystaniem zmiennych stanu można prowadzić analizy zarówno układów jedno- jak i wielowymiarowych, przy czym postać opisu jest taka sama w obu przypadkach. Jest to więc metoda uniwersalna, często określana mianem **nowoczesnej teorii sterowania**.

Teoria ta opiera się na opisie układu przy użyciu **n** równań różniczkowych pierwszego rzędu, które mogą być połączone w **równania różniczkowe wektorowo-macierzowe**. Użycie notacji wektorowo-macierzowej wydatnie upraszcza opis matematyczny układów modelowanych przy wykorzystaniu równań różniczkowych zwyczajnych stacjonarnych.

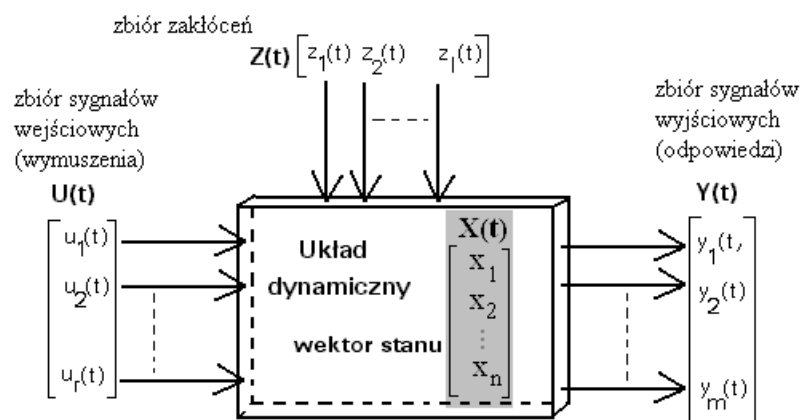
Pojęcia stosowane w metodzie zmiennych stanu

1. stan układu dynamicznego, zmienne stanu,
2. przestrzeń stanu,
3. wektor stanu,
4. trajektoria stanu.

Stan układu dynamicznego, zmienne stanu

1. najmniej liczny zbiór wielkości (zmiennych stanu), którego znajomość w chwili początkowej t_0 i znajomość wymuszeń w przedziale (t_0, t) pozwalają wyznaczyć stan i odpowiedź układu w dowolnej chwili $t > t_0$.
2. najmniej liczny zbiór wielkości (zmiennych stanu), które pozwalają na ocenę zachowania się obiektu (układu) w przyszłości, czyli jednoznacznie określają zachowanie układu.
3. zbiór liniowo niezależnych wielkości (zmiennych stanu), który:
 - jednoznacznie określa skutki przeszłych oddziaływań na układ,
 - jest wystarczający do wyznaczenia zachowania się układu (procesu) w przyszłości.

Stan układu dynamicznego, zmienne stanu



Rys. Model układu dynamicznego

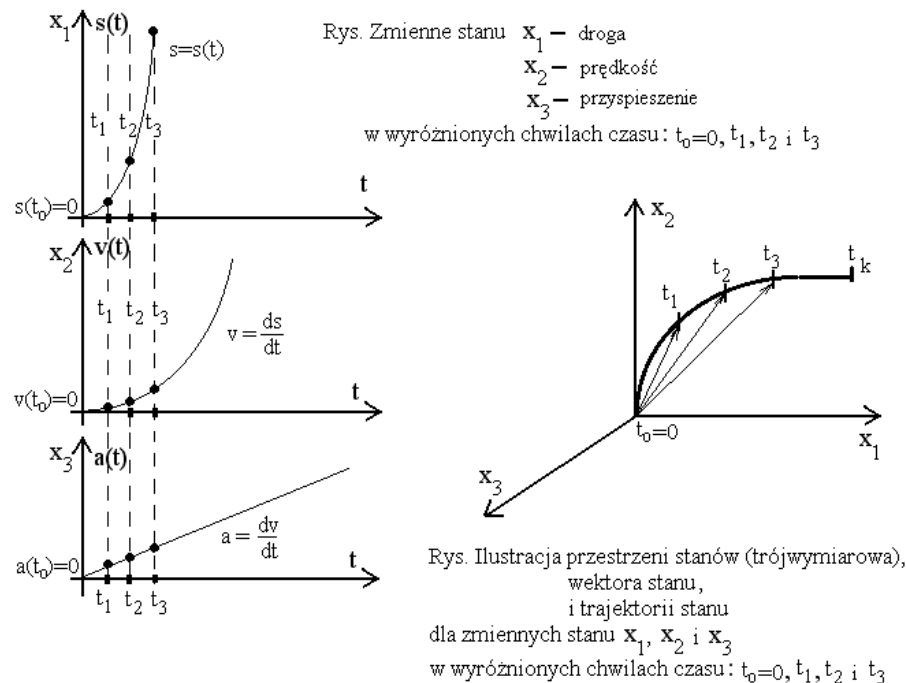
Wielkości: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywamy **zmiennymi stanu** lub **współzrędnymi stanu**

Stan układu dynamicznego zmienne stanu

Przykładem zmiennych/współzrędných stanu dla np.:

1. układu mechanicznego może być zbiór liniowo niezależnych wielkości takich jak:
 - współrzędne położenia tego układu,
 - I pochodna współrzędnych położenia,
 - II pochodna współrzędnych położenia.
3. maszyny elektrycznej może być zbiór liniowo niezależnych wielkości takich jak:
 - prąd w obwodzie wirnika,
 - siła elektromotoryczna,
 - strumień magnetyczny,
 - prędkość obrotowa.

Przestrzeń stanów, wektor stanu, trajektoria stanu.



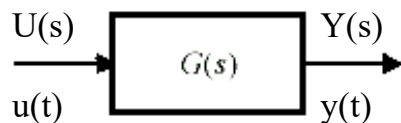
Opis układu w przestrzeni stanu

Układy sterowania, ogólnie mogą być opisane za pomocą równania różniczkowego n -tego rzędu. Równanie takie może być zdekomponowane na n równań różniczkowych pierwszego rzędu, które są łatwiejsze do rozwiązania niż równania rzędu wyższego.

Opis układu w przestrzeni stanu może być zrealizowany na podstawie równania różniczkowego jak i transmitancji, bądź może zostać zdefiniowany już na etapie modelowania układu sterowania.

Opis układu w przestrzeni stanu

Układ jednowymiarowy o sygnale wejściowym $u(t)$ i wyjściowym $y(t)$, dla którego należy wyznaczyć opis w przestrzeni stanu.



Transmitancja układu:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b'_0 + b'_1 s + \dots + b'_{m-1} s^{m-1} + b'_m s^m)}{(a'_0 + a'_1 s + \dots + a'_{n-1} s^{n-1} + a'_n s^n)}, \text{ gdzie } m < n$$

Dzieląc licznik i mianownik powyższego wyrażenia przez $a'_n s^n$ i wprowadzając nowe oznaczenia współczynników uzyskujemy:

Opis układu w przestrzeni stanu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\left(\frac{b'_0}{a'_n} s^{-n} + \frac{b'_1}{a'_n} s^{1-n} + \dots + \frac{b'_{m-1}}{a'_n} s^{m-1-n} + \frac{b'_m}{a'_n} s^{m-n} \right)}{\left(\frac{a'_0}{a'_n} s^{-n} + \frac{a'_1}{a'_n} s^{1-n} + \dots + \frac{a'_{n-1}}{a'_n} s^{-1} + 1 \right)} =$$

$$= \frac{(b_0 s^{-n} + b_1 s^{1-n} + \dots + b_{m-1} s^{m-1-n} + b_m s^{m-n})}{(a_0 s^{-n} + a_1 s^{1-n} + \dots + a_{n-1} s^{-1} + 1)}$$

Do podstawowego równania na transmitancję wprowadzamy sygnał pomocniczy $e(t)$ o transformacie $E(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{U(s)}$$

Opis układu w przestrzeni stanu

Więc transmitancję $G(s)$ można przedstawić jako iloczyn dwóch składników:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = (b_0 s^{-n} + b_1 s^{1-n} + \dots + b_{m-1} s^{m-1-n} + b_m s^{m-n})$$

$$\frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{(a_0 s^{-n} + a_1 s^{1-n} + \dots + a_{n-1} s^{-1} + 1)}$$

Przekształcając powyższe zależności otrzymujemy:

$$Y(s) = b_0 s^{-n} E(s) + b_1 s^{1-n} E(s) + \dots + b_{m-1} s^{m-1-n} E(s) + b_m s^{m-n} E(s)$$

$$E(s) = U(s) - a_0 s^{-n} E(s) - a_1 s^{1-n} E(s) - \dots - a_{n-1} s^{-1} E(s)$$

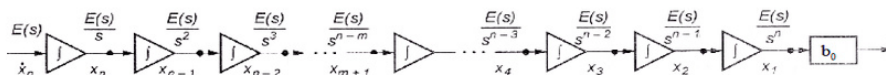
Powyższe równania można przedstawić w postaci schematu blokowego zawierającego człony całkujące i proporcjonalne.

Opis układu w przestrzeni stanu

$$Y(s) = b_0 s^{-n} E(s) + b_1 s^{1-n} E(s) + \dots + b_{m-1} s^{m-1-n} E(s) + b_m s^{m-n} E(s)$$

$$E(s) = U(s) - a_0 s^{-n} E(s) - a_1 s^{1-n} E(s) - \dots - a_{n-1} s^{-1} E(s)$$

Zgodnie z powyższymi równaniami, sygnały $E(s)$ oraz $Y(s)$, otrzymujemy z węzłów sumacyjnych, przy czym dla sygnału $E(s)$ jest to suma sygnału $U(s)$ i sygnałów z pętli sprzężeń zwrotnych od wyjść odpowiednich członów całkujących przez człony proporcjonalne a dla sygnału $Y(s)$ jest to suma sygnałów od wyjść odpowiednich członów całkujących poprowadzone w torach równoległych przez człony proporcjonalne.

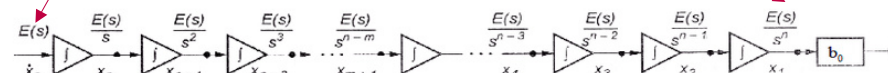


Opis układu w przestrzeni stanu

$$Y(s) = b_0 s^{-n} E(s) + b_1 s^{1-n} E(s) + \dots + b_{m-1} s^{m-1-n} E(s) + b_m s^{m-n} E(s)$$

$$E(s) = U(s) - a_0 s^{-n} E(s) - a_1 s^{1-n} E(s) - \dots - a_{n-1} s^{-1} E(s)$$

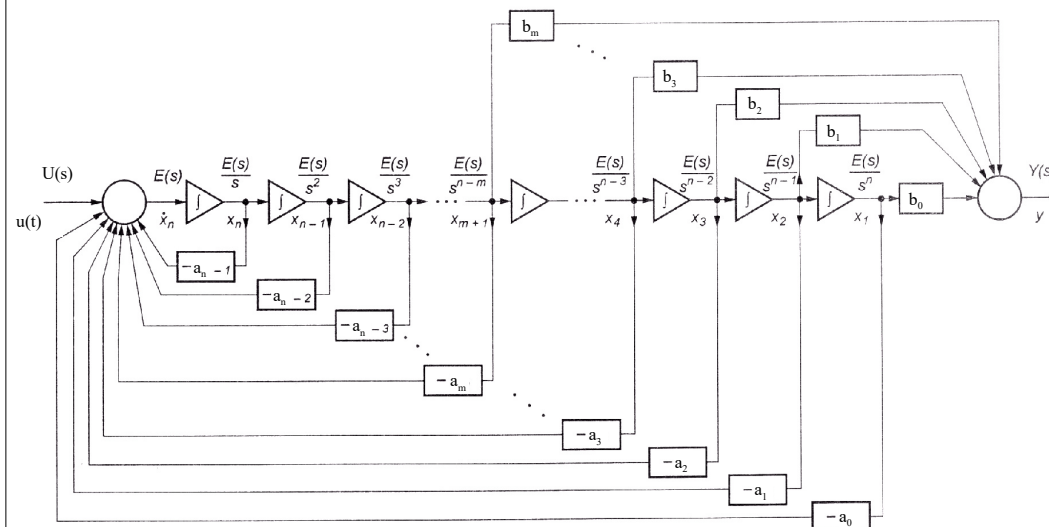
W schemacie blokowym znajdzie się n -członów całkujących połączonych w kaskadzie. Sygnał wejściowy pierwszego z członów całkujących jest równy $E(s)$, więc na jego wyjściu pojawi się sygnał $s^{-1}E(s)$ i odpowiednio na wyjściu n -tego członu całkującego sygnał $s^{-n}E(s)$.



Opis układu w przestrzeni stanu

$$Y(s) = b_0 s^{-n} E(s) + b_1 s^{1-n} E(s) + \dots + b_{m-1} s^{m-1-n} E(s) + b_m s^{m-n} E(s)$$

$$E(s) = U(s) - a_0 s^{-n} E(s) - a_1 s^{1-n} E(s) - \dots - a_{n-1} s^{-1} E(s)$$



Opis układu w przestrzeni stanu

Definiowanie fazowych zmiennych stanu:

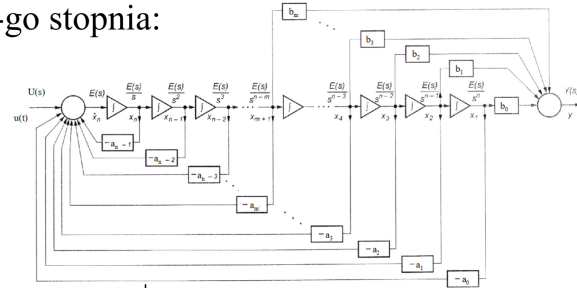
Sygnały wyjściowe poszczególnych członów całkujących (od ostatniego do pierwszego) stanowią kolejne zmienne stanu. Ponieważ kolejna zmienna stanu jest pochodną poprzedniej, więc są to zmienne fazowe. Można więc zapisać następujący układ równań różniczkowych 1-go stopnia:

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

$$\dots$$

$$x'_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - \dots - a_{n-1} x_n + u$$



Opis układu w przestrzeni stanu

Wprowadzając oznaczenia macierzowe:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy zapis macierzowy:

$$x' = Ax + Bu$$

Równanie na sygnał wyjściowy po wprowadzeniu zmiennych stanu przyjmie postać:

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_m x_{m+1} \text{ co można zapisać:}$$

$$y = Cx, \quad \text{gdzie } C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_m \ 0 \ \dots \ 0]$$

Opis układu w przestrzeni stanu

Stąd uzyskujemy macierzowy układ równań:

$$\begin{cases} x' = A \cdot x + B \cdot u \\ Y = C \cdot x \end{cases}$$

będący opisem układu jednowymiarowego za pomocą zmiennych stanu.

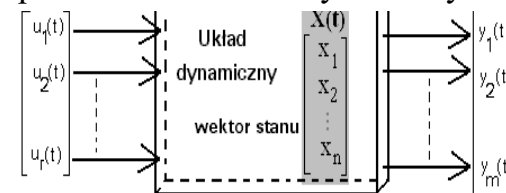
W przypadku ogólnym gdy stopnie wielomianów licznika i mianownika transmitancji układu są równe ($n=m$) w drugim równaniu pojawi się dodatkowy składnik:

$$\begin{cases} x' = A \cdot x + B \cdot u \\ Y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$$

Powyższy opis jest uniwersalny i może być zastosowany także do opisu układów wielowymiarowych.

Opis układu w przestrzeni stanu

Powyższy opis jest uniwersalny i może być zastosowany także do opisu układów wielowymiarowych.



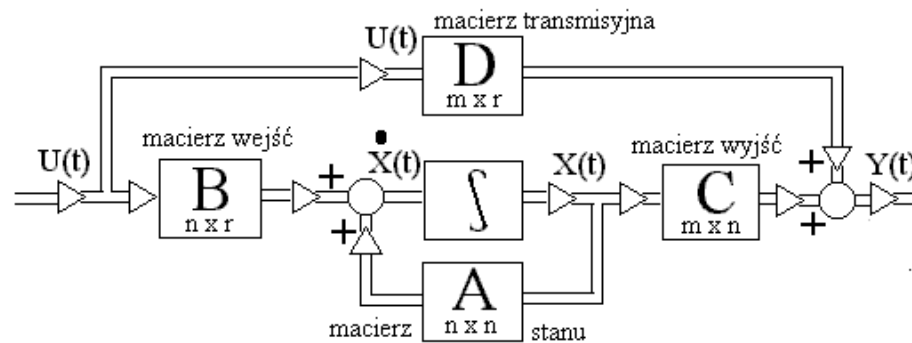
$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

U(t) - wektor sygnałów wejściowych, $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$	X(t) - wektor stanu, $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$	Y(t) - wektor sygnałów wyjściowych, $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$
A - macierz stanu o wymiarach $n \times n$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	B - macierz wejść o wymiarach $n \times r$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}$	C - macierz wyjść o wymiarach $m \times n$, $C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$

Opis układu w przestrzeni stanu

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Macierzowy układ równań może być zilustrowany macierzowym schematem blokowym:



Rys. Schemat blokowy układu gdy sygnały sterujące oddziałują także na sygnały wyjściowe $U(t) \rightarrow Y(t)$

Opis układu w przestrzeni stanu

Przejdźcie odwrotne, z zapisu zmiennych stanu do zapisu transmitacyjnego.

Po dokonaniu transformacji Laplace'a układu równań: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ uzyskujemy:
$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $X(s)$:

$$X(s) = \frac{BU(s)}{sI - A} \quad I - \text{macierz jednostkowa}$$

Podstawiając zależność na $X(s)$ do drugiego równania:

$$Y(s) = \left(\frac{CB}{sI - A} + D \right) U(s)$$

Uzyskujemy postać zapisu macierzy transmitancji:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{CB}{sI - A} + D$$

Opis układu w przestrzeni stanu

Przykład: dokonać opisu w przestrzeni stanu układów o transmitancji:

$$1. \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+3}$$