

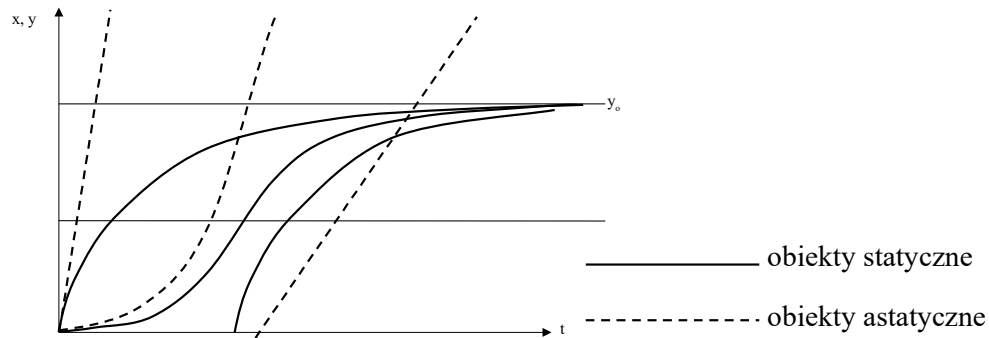
Automatyka i robotyka

WYKŁAD
UKŁADY AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

Edward Tertel
dr inż.

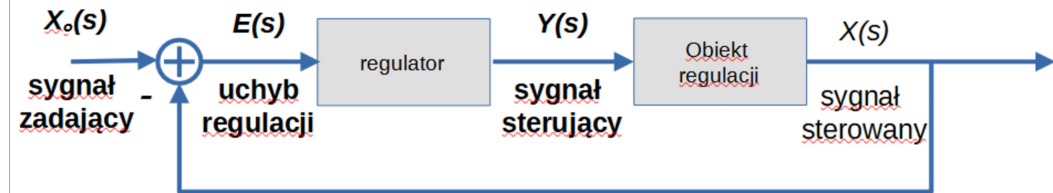
UKŁADY AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

- **statyczne:** (z wyrównaniem) posiadają zdolność do samoczynnego osiągnięcia stanu równowagi po wymuszeniu skokowym,
- **astatyczne:** (bez wyrównania) nie osiągają stanu równowagi po wymuszeniu skokowym,



UKŁADY AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

Układem regulacji automatycznej nazywamy układ dynamiczny z ujemnym sprzężeniem zwrotnym



Podstawowym celem URA jest samoczynne „zerowanie” uchybu regulacji wywołanego bądź zmianą sygnału $y_0(t)$ bądź oddziaływaniem zakłóceń $z(t)$.

UKŁADY AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

Projektowanie URA:

Projektując URA należy spełnić wymóg zapewnienia **stabilności** działania układu.

STABILNOŚĆ

Układ stabilny po wyprowadzeniu ze stanu równowagi jest w stanie sam powrócić do tego stanu.

Stabilność wg Laplace'a

Układ liniowy jest stabilny, jeżeli jego odpowiedź na wymuszenie (zakłócenie) o ograniczonej wartości jest ograniczona.

Projektowanie URA:

Projektując URA należy spełnić wymóg zapewnienia **stabilności** działania układu.

Stabilność – warunki analityczne

Dla układu dynamicznego, którego transmitancja jest opisana:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m)}{(a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

wielomian mianownika przyrównany do zera jest tzw. równaniem charakterystycznym:

$$a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

Projektowanie URA:

Projektując URA należy spełnić wymóg zapewnienia **stabilności** działania układu.

Stabilność – warunki analityczne

wielomian mianownika przyrównany do zera jest tzw. równaniem charakterystycznym:

$$a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

Jeżeli s_1, s_2, \dots, s_n są pierwiastkami tego równania (bieguny transmitancji), to składowa ogólna y_p równania różniczkowego dynamiki układu przyjmie postać:

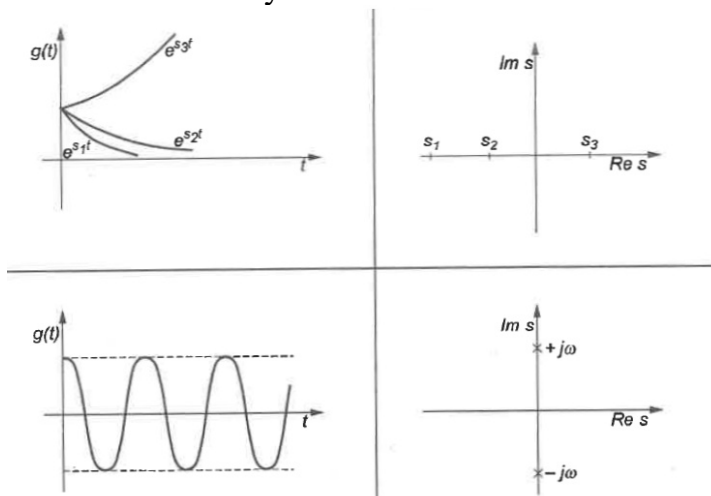
$$y_p(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}$$

Pierwiastki s_1, s_2, \dots, s_n mogą przyjmować wartości zerowe, rzeczywiste dodatnie lub ujemne, zespolone z częścią rzeczywistą dodatnią lub ujemną.

Projektowanie URA:

Projektując URA należy spełnić wymóg zapewnienia **stabilności** działania układu.

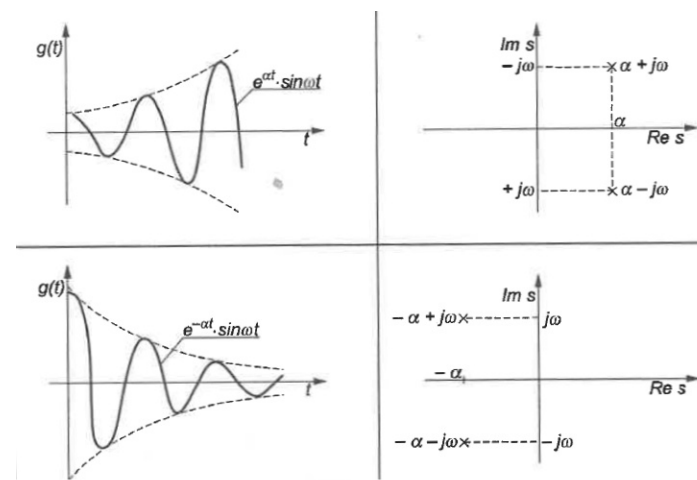
Stabilność – warunki analityczne $y_p(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}$



Projektowanie URA:

Projektując URA należy spełnić wymóg zapewnienia **stabilności** działania układu.

Stabilność – warunki analityczne $y_p(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}$



Projektowanie URA:

Projektując URA należy spełnić wymóg zapewnienia **stabilności** działania układu.

$$y_p(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}$$

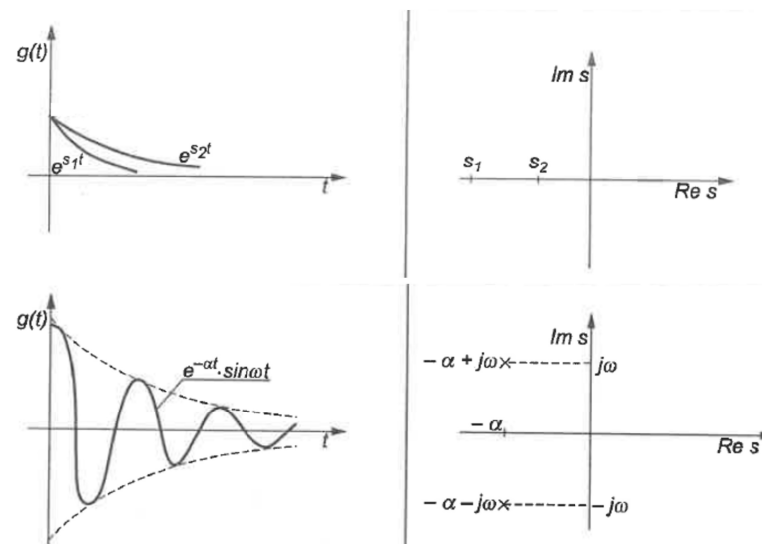
Funkcja y_p ma charakter zanikający w czasie jeśli pierwiastki s_1, s_2, \dots, s_n są ujemne tzn. leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej s .

Badanie stabilności układu polega na określeniu położenia pierwiastków równania charakterystycznego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności URA jest aby pierwiastki równania charakterystycznego (bieguny transmitancji) leżały na lewo od osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej s .

Projektowanie URA:

Projektując URA należy spełnić wymóg zapewnienia **stabilności** działania układu.



Formalne kryteria stabilności:

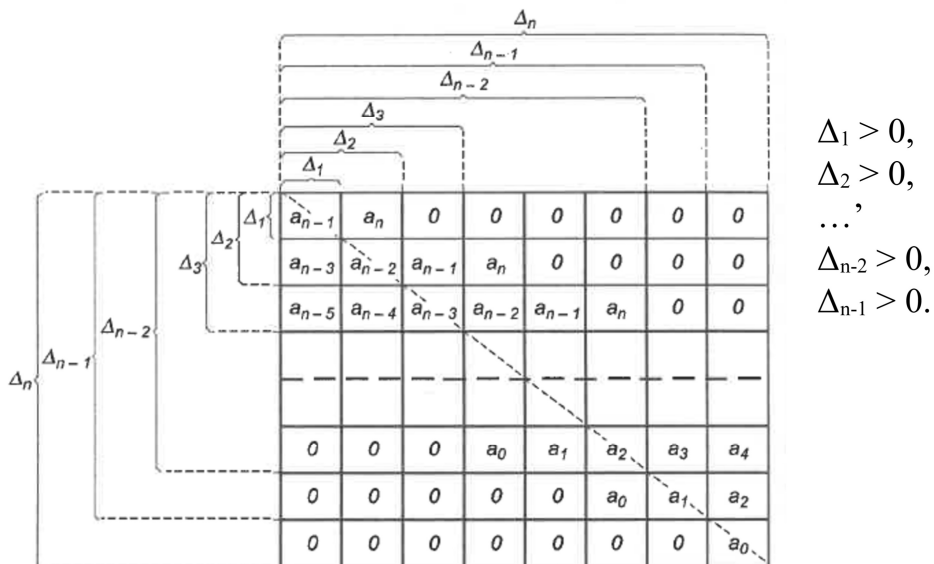
- Analityczne: (Hurwitza, Routha)
 - na podstawie transmitancji
- Grafoanalityczne: (Michajłowa)
 - na podstawie charakterystyk częstotliwościowych
- Graficzne (Nyquista)
 - na podstawie charakterystyk częstotliwościowych

Formalne kryteria stabilności: Kryterium Hurwitza

- Czasem nie znamy dokładnych pierwiastków równania charakterystycznego: $a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$
- Kryterium Hurwitza pozwala sprawdzić stabilność bez konieczności liczenia pierwiastków.
- Konieczne jest spełnienie dwóch warunków:
 - 1) Warunek konieczny: wszystkie współczynniki $a_i > 0$
 - 2) Warunek konieczny i wystarczający: pewne wyznaczniki macierzy Hurwitza muszą być dodatnie.

Formalne kryteria stabilności: Kryterium Hurwitza

Macierz Hurwitza: $a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$

**Formalne kryteria stabilności: Kryterium Hurwitza**

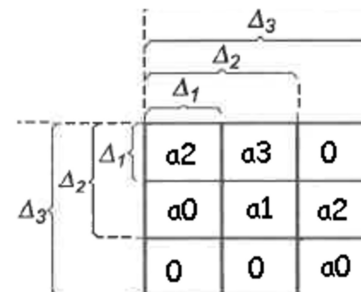
Macierz Hurwitza: Przykład $a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

1) Warunek konieczny: wszystkie współczynniki $a_i > 0$

$$a_0 = 6, \quad a_1 = 11, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 1,$$

2) Macierz Hurwitza i minory:

**Formalne kryteria stabilności: Kryterium Hurwitza**

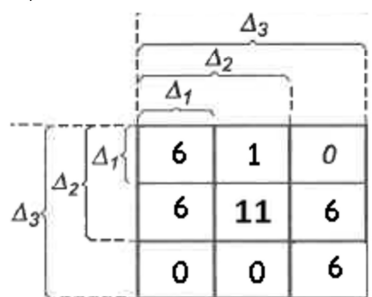
Macierz Hurwitza: Przykład $a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

1) Warunek konieczny: wszystkie współczynniki $a_i > 0$

$$a_0 = 6, \quad a_1 = 11, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 1,$$

2) Macierz Hurwitza i minory:



$$\Delta_1 = 6 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 60 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 360 > 0.$$

Wszystkie warunki spełnione \rightarrow układ stabilny

Formalne kryteria stabilności: Kryterium Routha

• Czasem nie znamy dokładnych pierwiastków równania charakterystycznego: $a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$

• Kryterium Routha pozwala sprawdzić stabilność bez konieczności liczenia pierwiastków.

1) Warunek konieczny: wszystkie współczynniki $a_i > 0$

2) Tworzymy specjalną tablicę Routha na podstawie współczynników równania.

3) Sprawdzamy liczbę zmian znaku w pierwszej kolumnie tablicy.

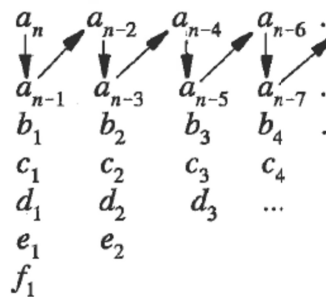
4) Warunek stabilności: brak zmian znaku w pierwszej kolumnie.

5) Liczba zmian znaku = liczba pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej (układ niestabilny).

Formalne kryteria stabilności: Kryterium Routha

$$a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

Tworzymy specjalną tablicę Routha na podstawie współczynników równania.



$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}; \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}; \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}; \dots$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}; \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}; \dots$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}; \quad d_2 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}}{-c_1}; \dots$$

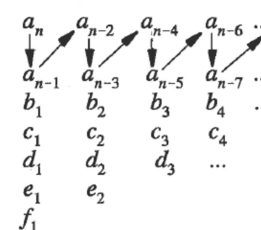
Formalne kryteria stabilności: Kryterium Routha

$$a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

Przykład: $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = s^3 + 5s^2 + 6s + 4$

Współczynniki: $a_3=1, a_2=5, a_1=6, a_0=4$

Tablica Routha:



a_3	a_1	1	6
a_2	a_0	5	4
b_1	b_2	5.2	0
c_1	c_2	4	0

$$b_1 = (1 \cdot 4 - 5 \cdot 6) / -5 = 5.2$$

$$c_1 = (5 \cdot 0 - 5.2 \cdot 4) / -5.2 = 4$$

Pierwsza kolumna: 1, 5, 5.2, 4 \rightarrow brak zmian znaku

Układ stabilny

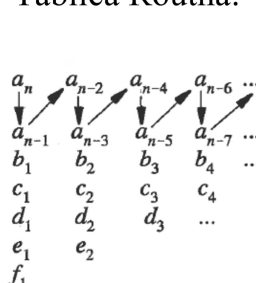
Formalne kryteria stabilności: Kryterium Routha

$$a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

Przykład: $2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$.

- Współczynniki: $a_4=2, a_3=1, a_2=3, a_1=5, a_0=10$

Tablica Routha:



a_4	a_2	a_0	2	3	10
a_3	a_1	0	1	5	0
b_1	b_2	b_3	-7	10	0
c_1	c_2	c_3	6.43	0	0
d_1	d_2	d_3	10	0	0

$$b_1 = (2 \cdot 0 - 1 \cdot 3) / -1 = -7$$

$$b_2 = (2 \cdot 0 - 1 \cdot 5) / -7 = 10$$

Pierwsza kolumna: 2, 1, -7, 6.43, 10 zmiana znaku

Układ niestabilny

Formalne kryteria stabilności: Kryterium Michajłowa

$$a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n = 0$$

Kryterium Michajłowa bada stabilność poprzez analizę wykresu wektorowego wielomianu charakterystycznego na płaszczyźnie zespolonej.

- Zapisujemy wielomian charakterystyczny jako funkcję zespoloną:

$$M(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0$$

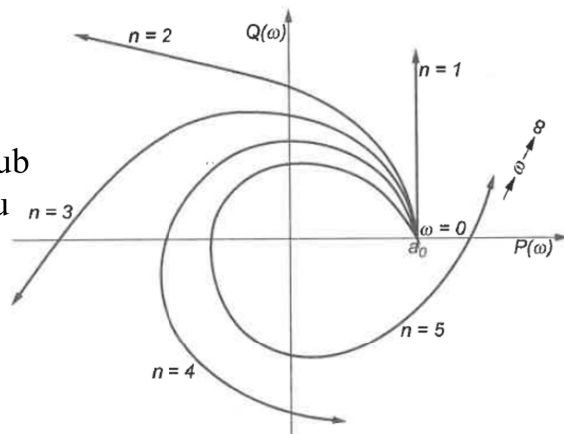
- Rysujemy wykres $M(j\omega)$ na płaszczyźnie zespolonej dla $\omega \in [0, \infty)$.

Kryterium: jeśli wektor $M(j\omega)$ wykonuje obrót o $n \cdot 90^\circ$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (przechodzi kolejno przez n-ćwiartek układu współrzędnych) — układ jest stabilny.

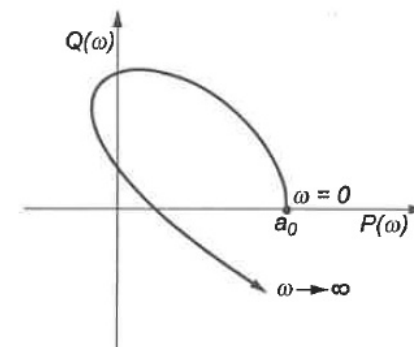
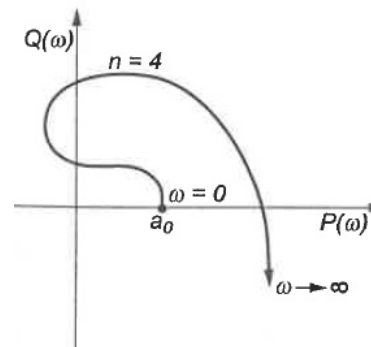
Formalne kryteria stabilności: Kryterium Michajłowa

Przykład: Dla układu 4. rzędu ($n=4$), stabilny układ da obrót przez 4 ćwiartki układu współrzędnych.

Hodograf wektora $M(j\omega)$ startuje na osi rzeczywistej i przechodzi przez kolejne ćwiartki układu współrzędnych bez przeskoków lub powrotów, mając początek układu zawsze po lewej stronie,
→ układ stabilny.

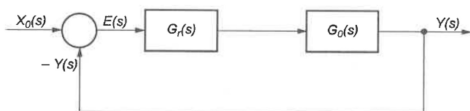
**Formalne kryteria stabilności: Kryterium Michajłowa**

Jeśli obrót jest w przeciwnym kierunku, zerowy lub „zatrzymany”
→ układ niestabilny.

**Formalne kryteria stabilności: Kryterium Nyquista**

Badanie stabilności URA na podstawie przebiegu charakterystyki amplitudowo- fazowej układu otwartego.

Dla układu:



Transmitancja układu otwartego: $K(s) = \frac{Y(s)}{X_0(s)} = G_r(s) G_0(s)$

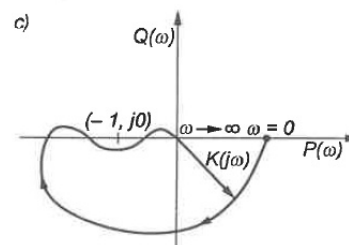
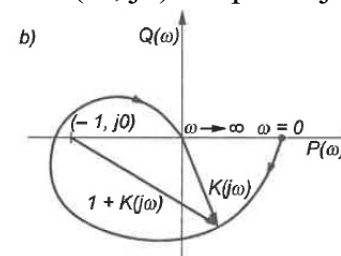
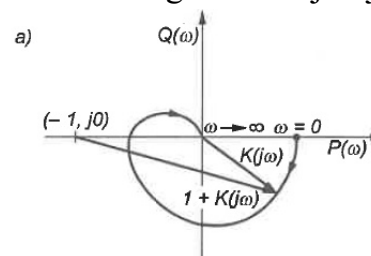
Zastępując $s \rightarrow j$, można zapisać transmitancję widmowa $K(j\omega)$ jako funkcję zmiennej zespolonej będącej sumą części rzeczywistej i urojonej:

$$K(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

URA jest stabilny, jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa $K(j\omega)$ układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$ dla pulsacji $\omega \in [0, \infty)$.

Formalne kryteria stabilności: Kryterium Nyquista

URA jest stabilny, jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa $K(j\omega)$ układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$ dla pulsacji $\omega \in [0, \infty)$.



a,c – stabilny
b - niestabilny

Ocena jakości i regulacji

Co to jest jakość regulacji?

- miara skuteczności działania układu regulacji.
- jak dobrze układ śledzi zadany sygnał i jak szybko eliminuje zakłócenia.

Sposoby oceny jakości regulacji (wskaźniki):

- **Dokładność statyczna:** czy wartość ustalona wyjścia odpowiada wartości zadanej?
- **Szybkość odpowiedzi:** jak szybko układ reaguje na zmianę?
- **Przeregulowanie:** jak bardzo układ "przeskakuje" wartość zadaną?
- **Czas regulacji:** po jakim czasie układ osiąga stan bliski wartości zadanej?
- **Tłumienie drgań:** czy układ generuje oscylacje?

Ocena jakości i regulacji

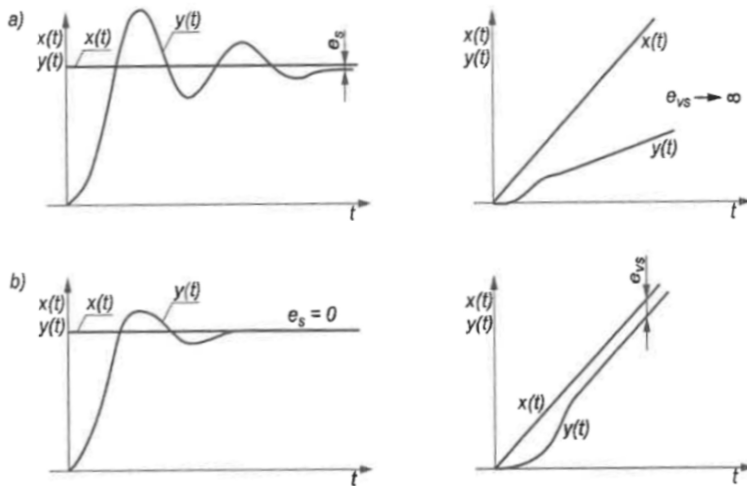
- **Dokładność statyczna:**

zdolność układu regulacji do utrzymania wyjścia na poziomie wartości zadanej w stanie ustalonym (przy czasie dążącym do ∞).

Uchyb statyczny:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

wskazuje na trwałą różnicę między sygnałem zadanym a wyjściem układu.



Ocena jakości i regulacji

Grupy kryteriów oceny jakości regulacji?

- Na podstawie charakterystyki **skokowej**,
- Na podstawie charakterystyki **częstotliwościowej**,
- Kryteria **całkowe**.

- Ocena jakości i regulacji na podstawie **charakterystyki skokowej**,

Charakterystyka skokowa to odpowiedź układu na sygnał zadany w postaci skoku jednostkowego.

Analizując kształt odpowiedzi skokowej, oceniamy:

- **Czas regulacji:** czas, po którym odpowiedź pozostaje w zakresie $\pm 5\%$ (lub $\pm 2\%$) wartości końcowej,
- **Czas narastania:** czas dojścia od 10% do 90% wartości ustalonej,
- **Przeregulowanie** : wskaźnik procentowy przekraczania wartość zadanej.

$$\chi = \frac{e_{p1}}{e_{p0}} * 100\%$$

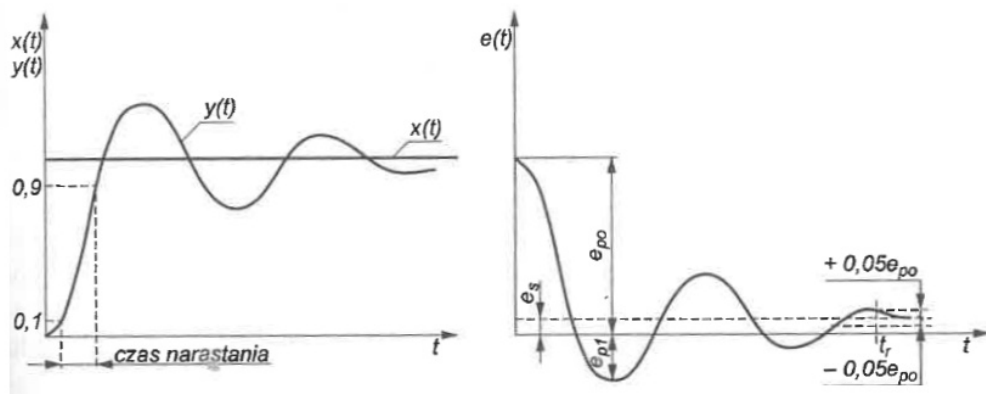
e_{p0} – początkowy uchyb przejściowy (maksymalny),

e_{p1} – największy uchyb o znaku przeciwnym niż e_{p0}

- Ocena jakości i regulacji na podstawie **charakterystyki skokowej**,

Charakterystyka skokowa to odpowiedź układu na sygnał zadany w postaci skoku jednostkowego.

przeregulowanie: $\chi = \frac{e_{p1}}{e_{p0}} * 100\%$



- Ocena jakości i regulacji na podstawie **charakterystyki skokowej**,

Charakterystyka skokowa – interpretacja wskaźników:

Krótki czas narastania → szybka reakcja URA, układ dąży do bardzo szybkiego osiągnięcia wartości zadanej

Niskie przeregulowanie → spokojne działanie

Krótki czas regulacji → szybka stabilizacja układu

Zerowy uchyb → dobra dokładność statyczna

Jednak: zbyt szybko reagujący układ może prowadzić do braku stabilności (duże przeregulowanie, oscylacje).

Charakterystyka skokowa pozwala zrównoważyć szybkość i stabilność. Pomaga w doborze parametrów regulatora (np. PID)

- Ocena jakości i regulacji na podstawie **charakterystyki skokowej**,

Przykład: Układ regulacji pozycji ramienia robota

- Obiekt: układ napędu ramienia wraz z ramieniem,
- Wejście: zadana pozycja kątowa ramienia (np. 90°),
- Wyjście: rzeczywista pozycja ramienia,
- Urządzenie sterujące: regulator.

Gdy regulator jest zbyt agresywny (krótki czas narastania), układ dąży do bardzo szybkiego osiągnięcia wartości zadanej.

Inercja mechaniczna (bezwładność ramienia) oraz opóźnienia w odpowiedzi układu powodują, że ramię przekracza pozycję zadaną – powstaje przeregulowanie.

Układ może zacząć oscylować wokół wartości zadanej, co może dojść do niestabilności.

- Ocena jakości i regulacji na podstawie **charakterystyk częstotliwościowych**,

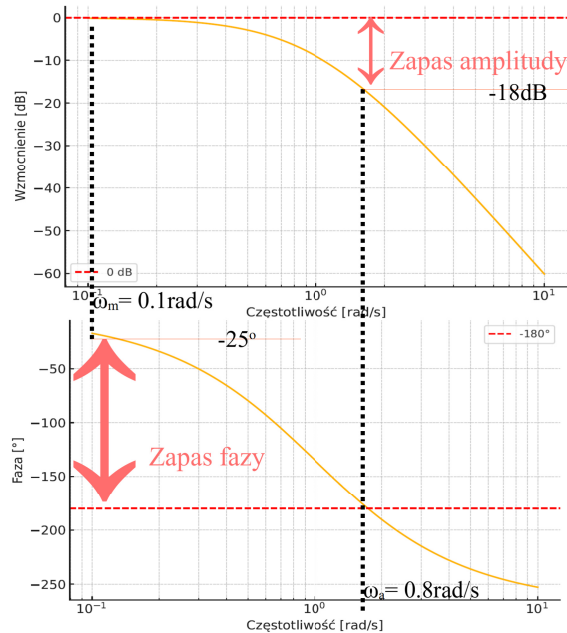
Charakterystyki częstotliwościowe to odpowiedzi układu na sygnały sinusoidalne o różnych częstotliwościach.

Charakterystyki częstotliwościowe umożliwiają ocenę:

- stabilności układu,
- rezerw stabilności:
 - rezerwa amplitudy: ile dB można jeszcze dodać do układu, zanim stanie się niestabilny,
 - rezerwa fazy: ile stopni fazy można jeszcze "stracić", zanim układ stanie się niestabilny.
- jakości tłumienia zakłóceń: słabe wzmocnienie przy wysokich częstotliwościach → lepsze tłumienie szumów.

- Ocena jakości i regulacji na podstawie

charakterystyk częstotliwościowych,



Zapas amplitudy jest odchyleniem charakterystyki amplitudowej od wartości 0dB dla pulsacji, dla której faza wynosi 180° (pulsacja graniczna fazy ω_a)

$$ZA = -(-18\text{dB}) = 18\text{dB}$$

Zapasem fazy jest odchylenie charakterystyki fazowej od 180° dla pulsacji, przy której wzmocnienie = 0dB (pulsacja graniczna modułu ω_m)

$$ZF = 180^\circ + (-25^\circ) = 155^\circ$$