

Układ dynamiczny

Ogólna postać zlinearyzowanego równania ruchu dla układu ciągłego:

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_n y^{(n)}(t) = \\ = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \dots + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + b_m x^{(m)}(t)$$

lub:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}, \quad m \leq n$$

Powyższe równanie opisuje układ o parametrach stałych (stacjonarny) i skupionych.

Analiza układów dynamicznych

Analiza układów dynamicznych może być prowadzona dwoma metodami:

2. **W zmiennej zespolonej** - w oparciu o równania transmitancji operatorowej lub widmowej układów.

Daje bardziej ogólne informacje o układzie niezależne od rodzaju wymuszenia. Analiza wielu połączonych układów jest łatwiejsza. Proces projektowania układów może być uproszczony

Analiza układów dynamicznych

Analiza układów dynamicznych może być prowadzona dwoma metodami:

1. **W zmiennej czasu** - w oparciu o różniczkowe równania ruchu rozwiązywane zgodnie z teorią równań różniczkowych.

Rozwiązanie określa zachowanie analizowanego układu w czasie (właściwości dynamiczne)

Analiza układów dynamicznych transformacja Laplace'a

Def.: Przekształcenie Laplace'a przyporządkowuje funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t , funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s wg wzoru zwanego całką Laplace'a.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$f(t)$ - oryginał funkcji,

$F(s)$ - transformata funkcji,

s - zmienna zespolona.

Analiza układów dynamicznych transformacja Laplace'a

W układach automatyki zmienną rzeczywistą jest czas, więc stosuje się tzw. jednostronne przekształcenie Laplace'a.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

przyjmując, że dla $t < 0$, $f(t) = 0$

Analiza układów dynamicznych transformacja Laplace'a

Transformację Laplace'a przyporządkowującą oryginałowi $f(t)$ transformatę $F(s)$ zapisuje się symbolem α

$$F(s) = \alpha[f(t)]$$

Aby możliwe było wyznaczenie transformaty danej funkcji, to funkcja ta w analizowanym przedziale powinna:

1. Osiągać skończone wartości,
2. Mieć pochodną w każdym punkcie przedziału.

Przykład 1: Wyznaczyć transformatę Laplace'a funkcji $f(t) = e^{-at}$.

Tabela 2. Wybrane transformaty Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
1. $\delta(t)$ (impuls jednostkowy)	1
2. $1(t)$ (skok jednostkowy)	$\frac{1}{s}$
3. $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$
4. $t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5. $\frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^3}$
6. $\frac{1}{n!} t^n \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
7. $e^{\sigma t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s - \sigma}$
8. $t e^{\sigma t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2}$

Wybrane własności przekształcenia Laplace'a

1. Twierdzenie o liniowości:

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + a_2 \mathcal{L}[f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

2. Twierdzenie transformacji pochodnych:

$$\alpha[f^{(n)}(t)] = s^n \alpha[f(t)] - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - s f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

$f(0+), f'(0+), \dots$ - prawostronne granice funkcji f i jej pochodnych dla $t=0$, tzw. warunki brzegowe.

Wybrane własności przekształcenia Laplace'a

3. Twierdzenie transformacji całki:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} F(s)$$

4. Twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie rzeczywistej:

dla dowolnego $a > 0$

$$\alpha[f(t-a)] = e^{-a \cdot s} \alpha[f(t)] = e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$$

$$\alpha[f(t+a)] = e^{a \cdot s} \left[F(s) - \int_0^a f(t) e^{-s \cdot t} dt \right]$$

Przykład 2: Zapisać równanie różniczkowe w postaci operatorowej: $Ty'(t) + y(t) = kx(t)$

NST 22-03-2025

3. Twierdzenie transformacji całki:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} F(s)$$

4. Twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie rzeczywistej:

dla dowolnego $a > 0$

$$\alpha[f(t-a)] = e^{-a \cdot s} \alpha[f(t)] = e^{-a \cdot s} \cdot F(s)$$

$$\alpha[f(t+a)] = e^{a \cdot s} \left[F(s) - \int_0^a f(t) e^{-s \cdot t} dt \right]$$

Przykład 2: Zapisać równanie różniczkowe w postaci operatorowej: $Ty'(t) + y(t) = kx(t)$

Odwrotne przekształcenie Laplace'a

Znając postać transformaty $F(s)$ można obliczyć oryginał, tj. funkcję zmiennej rzeczywistej $f(t)$.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Przekształcenie to oznacza się symbolicznie:

$$f(t) = \alpha^{-1}[F(s)]$$

Tabela 2. Wybrane transformaty Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
1. $\delta(t)$ (impuls jednostkowy)	1
2. $1(t)$ (skok jednostkowy)	$\frac{1}{s}$
3. $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$
4. $t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5. $\frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^3}$
6. $\frac{1}{n!} t^n \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
7. $e^{\sigma t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s - \sigma}$
8. $t e^{\sigma t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2}$

Analityczne uzyskiwanie oryginału funkcji

1. Wielomianowa postać transformaty:

$$F[s] = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{a_l s^l + a_{l-1} s^{l-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad m > 1$$

2. Rozkład wielomiany na ułamki proste:

$$F[s] = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_m)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_m}{s-s_m}$$

gdzie:

$$A_k = \frac{L(s_k)}{M'(s_k)}, \quad M'(s_k) = \frac{dM(s)}{ds} \Big|_{s=s_k}$$

Analityczne uzyskiwanie oryginału funkcji

2a. Rozkład wielomiany na ułamki proste

(gdy mianownik $M(s)$ ma wielokrotne miejsca zerowe):

$$F[s] = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{s-s_{n-1}} + \frac{B_1}{s-s_n} + \frac{B_2}{(s-s_n)^2} + \dots + \frac{B_p}{(s-s_n)^p} + \frac{A_{n+1}}{s-s_{n+1}} + \dots + \frac{A_m}{s-s_m}$$

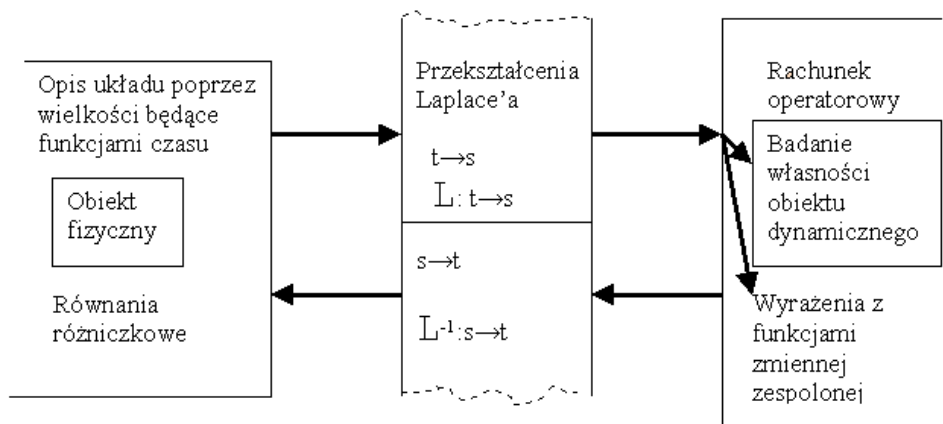
gdzie:

$$B_p = \frac{L(s)(s-s_n)^p}{M(s)} \Big|_{s=s_n}; \quad B_{p-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{L(s)(s-s_n)^p}{M(s)} \right] \Big|_{s=s_n}; \quad B_{p-2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{L(s)(s-s_n)^p}{M(s)} \right] \Big|_{s=s_n};$$

$$B_{p-i} = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{ds^i} \left[\frac{L(s)(s-s_n)^p}{M(s)} \right] \Big|_{s=s_n}$$

Przykład 3: Wyznaczyć oryginał transformaty: $F(s) = \frac{s^2}{s^3 + s^2 - 6s}$

Rachunek operatorowy



Transmitancja operatorowa

Rozpatrując układ dynamiczny opisany równaniem liniowym:

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_n y^{(n)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \dots + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + b_m x^{(m)}(t)$$

w którym sygnał wejściowy $x(t)$ powoduje powstanie sygnału wyjściowego $y(t)$ wprowadza się pojęcie transmitancji operatorowej.

Transmitancja operatorowa

Def.:

Transmitancją operatorową obiektu dynamicznego o sterowaniu $x(t)$ i odpowiedzi $y(t)$ nazywa się iloraz transformat Laplace'a odpowiedzi $Y(s)$ i sterowania $X(s)$, przy zerowych warunkach początkowych

$$G(s) = \frac{\alpha[y(t)]}{\alpha[x(t)]} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n)}(0) = 0$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(m)}(0) = 0$$

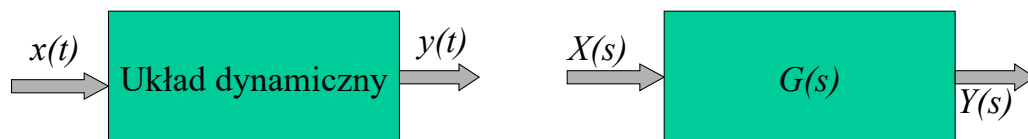
Transmitancja operatorowa

Stąd:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m)}{(a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$$X(s) = \alpha[x(t)]$$

$$Y(s) = \alpha[y(t)]$$



Przykład 4: Wyznaczyć transmitancję układu z przykładu 2.

Transmitancja operatorowa

Liniowe równanie ruchu:

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_n y^{(n)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \dots + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + b_m x^{(m)}(t)$$

Transformacja Laplace'a obu stron równania ruchu:

$$a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) + \dots + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + a_n s^n Y(s) = b_0 X(s) + b_1 s X(s) + \dots + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + b_m s^m X(s)$$

Wyłączenie transformat przed nawias:

$$(a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n) Y(s) = (b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m) X(s)$$

Transmitancja operatorowa

Stąd:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m)}{(a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Transmitancja operatorowa w powyższej postaci jest funkcją wymierną zmiennej s .

Postać ilorazu dwóch wielomianów, przy czym $m \leq n$ dla układów fizycznie realizowalnych.

Transmitancja operatorowa jest wielkością stałą, nie zależy od postaci sygnału wejściowego i odzwierciedla naturę fizyczną układu.

Transmitancja operatorowa - właściwości

Dysponując równaniem transmitancji układu można wyznaczyć transformatę wyjścia $Y(s)$ wg zależności:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

stąd można wyznaczyć przebieg czasowy odpowiedzi drogą odwrotnego przekształcenia Laplace'a:

$$y(t) = \alpha^{-1} [G(s) \cdot X(s)]$$

Transmitancja operatorowa - właściwości

Dysponując równaniem transmitancji układu oraz znając postać transformaty sygnału wyjściowego można wyznaczyć transformatę wejścia $X(s)$ wg zależności:

$$X(s) = Y(s) / G(s)$$

stąd można wyznaczyć przebieg czasowy sterowania drogą odwrotnego przekształcenia Laplace'a:

$$x(t) = \alpha^{-1} [Y(s) / G(s)]$$

Analiza układów dynamicznych

Analiza układów dynamicznych może być prowadzona dwoma metodami:

1. **W zmiennej czasu** - w oparciu o różniczkowe równania ruchu rozwiązywane zgodnie z teorią równań różniczkowych.

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}, \quad m \leq n$$

2. **W zmiennej zespolonej** - w oparciu o równania transmitancji operatorowej lub widmowej układów.

$$G(s) = \frac{\alpha[y(t)]}{\alpha[x(t)]} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

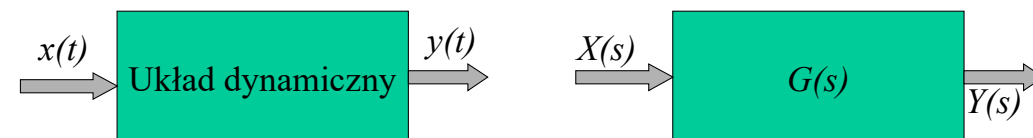
Transmitancja operatorowa

Stąd:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0 + b_1 s + \dots + b_{m-1} s^{m-1} + b_m s^m)}{(a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

$$X(s) = \alpha[x(t)]$$

$$Y(s) = \alpha[y(t)]$$



Transmitancja widmowa

Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych jest jedną z podstawowych metod określania właściwości układów dynamicznych.

Charakterystyka częstotliwościowa opisuje odpowiedź układu na **wymuszenie harmoniczne** (sinusoidalne) o częstotliwości zmieniającej się w określonym zakresie.

Transmitancja widmowa

Jeżeli na wejście liniowego układu dynamicznego podamy sygnał harmoniczny:

$$\bar{x}(t) = X_a (\cos \omega t + j \sin \omega t) = X_a e^{j\omega t}$$

gdzie: X_a - amplituda, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - pulsacja sygnału, T - okres drgań

to na wyjściu układu otrzymamy również sygnał harmoniczny:

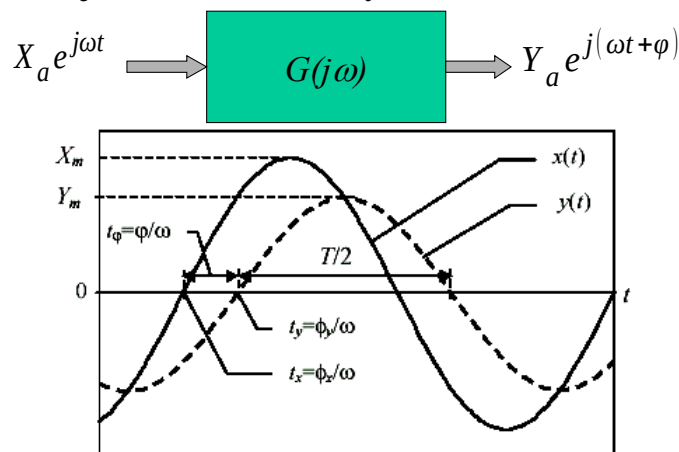
$$\bar{y}(t) = Y_a [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = Y_a e^{j(\omega t + \varphi)}$$

o tej samej częstotliwości kołowej (pulsacji) ω , ale w ogólności o innej amplitudzie Y_a i przesunięciu w fazie o kąt φ .

Transmitancja widmowa

Sygnał wyjściowy jest o tej samej częstotliwości kołowej (pulsacji), ale w ogólności o innej amplitudzie i fazie.

Przy czym zmiana amplitudy i fazy sygnału po przejściu przez układ jest różna dla różnych wartości ω .



Transmitancja widmowa

Podstawiając zależności na harmoniczne sygnały wejściowy i wyjściowy do podstawowego równania dynamiki elementu lub układu:

$$\begin{aligned} a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_n y^{(n)}(t) = \\ = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \dots + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + b_m x^{(m)}(t) \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_0 Y_a e^{j(\omega t + \varphi)} + \dots + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} Y_a e^{j(\omega t + \varphi)} + a_n (j\omega)^n Y_a e^{j(\omega t + \varphi)} = \\ = b_0 X_a e^{j\omega t} + \dots + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} X_a e^{j\omega t} + b_m (j\omega)^m X_a e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Skąd po przekształceniach:....

Transmitancja widmowa

uzyskuje się równanie na TRANSMITANCJĘ WIDMOWĄ :

$$G(j\omega) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}$$

gdzie: $A(\omega) = \frac{Y_a}{X_a}$

Transmitancja widmowa jest równa stosunkowi wartości zespolonej odpowiedzi układu, wywołanej wymuszeniem harmonicznym, do wartości zespolonej tego wymuszenia, w stanie ustalonym.

Transmitancja widmowa

Jeżeli na wejście liniowego członu lub układu zostanie wprowadzony sygnał harmoniczny, to w stanie ustalonym na wyjściu powstanie sygnał również harmoniczny o tej samej częstotliwości co sygnał wejściowy lecz o innej amplitudzie i fazie.

Przesunięcie fazowe $\phi(\omega)$ oraz amplituda sygnału wyjściowego $Y_a(\omega)$ są funkcjami zmian częstotliwości sygnału wejściowego.

Można więc stwierdzić, że transmitancja widmowa opisuje sposób w jaki dany element lub układ odtwarza okresowo zmieniający się sygnał wejściowy.

Transmitancja widmowa

Porównując zależności na TRANSMITANCJĘ WIDMOWĄ :

$$G(j\omega) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}$$

i TRANSMITANCJĘ OPERATOROWĄ:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0 + b_1s + \dots + b_{m-1}s^{m-1} + b_ms^m)}{(a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Widać analogiczną postać obu wyrażeń, które różnią się jedynie postacią zmiennej: s - dla transmitancji operatorowej,
 $j\omega$ - dla transmitancji widmowej.

co można zapisać:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=(j\omega)}$$

NST 29-03-2025

Porównując zależności na TRANSMITANCJĘ WIDMOWĄ :

$$G(j\omega) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}$$

i TRANSMITANCJĘ OPERATOROWĄ:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_0 + b_1s + \dots + b_{m-1}s^{m-1} + b_ms^m)}{(a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Widać analogiczną postać obu wyrażeń, które różnią się jedynie postacią zmiennej: s - dla transmitancji operatorowej,
 $j\omega$ - dla transmitancji widmowej.

co można zapisać:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=(j\omega)}$$

Transmitancja widmowa

Transmitancja widmowa jest liczbą zespoloną, którą można zapisać w postaci wykładniczej:

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

lub trygonometrycznej:

$$G(j\omega) = \frac{Y_a}{X_a} [\cos \phi(\omega) + j \sin \phi(\omega)]$$

Na podstawie powyższych można określić moduł transmitancji widmowej, który jest równy stosunkowi amplitud Y_a i X_a :

$$|G(j\omega)| = A(\omega) = \frac{Y_a}{X_a}$$

Zależność modułu transmitancji widmowej od pulsacji ω jest **amplitudową charakterystyką częstotliwościową $A(\omega)$**

Transmitancja widmowa

Transmitancja widmowa jest liczbą zespoloną, którą można zapisać w postaci wykładniczej:

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

lub trygonometrycznej:

$$G(j\omega) = \frac{Y_a}{X_a} [\cos \phi(\omega) + j \sin \phi(\omega)]$$

oraz argument transmitancji widmowej równy przesunięciu fazowemu między odpowiedzią i wymuszeniem:

$$\arg G(j\omega) = \phi(\omega) = \phi(\omega)_x - \phi(\omega)_y$$

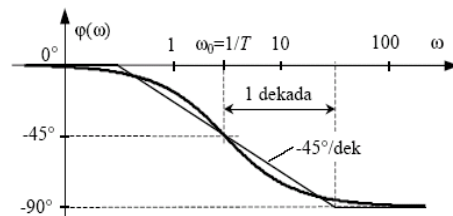
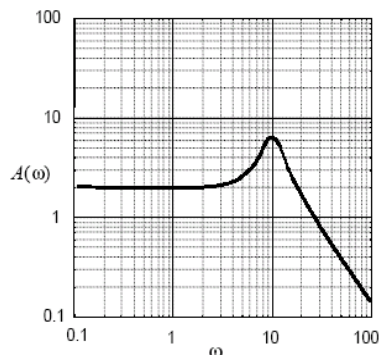
Zależność argumentu transmitancji widmowej od pulsacji ω jest **fazową charakterystyką częstotliwościową $\phi(\omega)$**

jest to *przesunięcie fazowe* sygnału wyjściowego w stosunku do sygnału wejściowego w funkcji częstotliwości ω

Transmitancja widmowa

Charakterystyki częstotliwościowe: amplitudowa oraz fazowa przedstawiają więc graficznie transmitancję widmową elementu lub układu.

Charakterystyki te są stosowane w logarytmicznej skali pulsacji ω i nazywane odpowiednio logarytmiczną charakterystyką amplitudową lub fazową.



Transmitancja widmowa

Jeżeli transmitancję widmową przedstawi się w postaci trygonometrycznej (algebraicznej), to uzyskuje się charakterystyki częstotliwościowe: rzeczywistą i urojoną.

$$G(j\omega) = A(\omega)[\cos \phi(\omega) + j \sin \phi(\omega)] =$$

$$= A(\omega) \cos \phi(\omega) + j A(\omega) \sin \phi(\omega) = P(\omega) + j Q(\omega)$$

$$\text{Gdzie: } P(\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] \quad Q(\omega) = \operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

Charakterystyki częstotliwościowe można określić zależnościami:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

$$\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Transmitancja widmowa

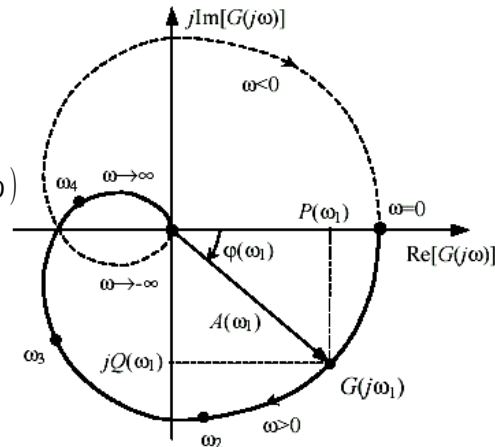
Charakterystyka transmitancji widmowej najczęściej jest przedstawiana w postaci amplitudowo-fazowej (charakterystyka Nyquista) na płaszczyźnie zmiennej zespolonej, przy zmianie częstotliwości ω od zera do nieskończoności.

$$G(j\omega) = A(\omega) [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] =$$

$$= A(\omega) \cos \varphi(\omega) + j A(\omega) \sin \varphi(\omega) = P(\omega) + j Q(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

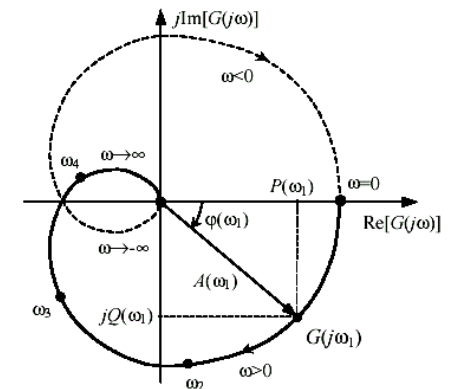
$$\phi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Transmitancja widmowa

Zastosowanie charakterystyki Nyquista:

- analiza stabilności układu regulacji (kryterium Nyquista),
- ocena odporności układu na zaburzenia: rezerwa fazy i amplitudy,
- ocena dynamiki obiektu: oscylacje/tłumienie



Transmitancja widmowa

Przykład:

Wyznaczyć charakterystykę amplitudowo-fazową członu inercyjnego

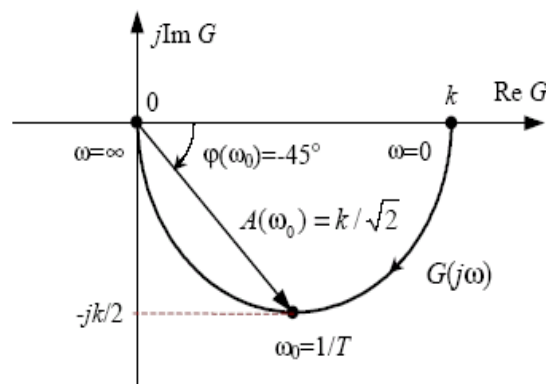
$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2},$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q}{P} = -\arctg \omega T$$



Transmitancja widmowa

Charakterystyki logarytmiczne:

Większe znaczenie w praktyce mają charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone w skali logarytmicznej, nazywane **charakterystykami Bodego**.

Logarytmiczna charakterystyka amplitudowa $Lm(\omega)$ (logarytmiczny moduł wzmocnienia) jest określona zależnością:

$$Lm(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

i podawana w *decybelach* [dB] wzmocnienia w funkcji częstotliwości przedstawionej w skali logarytmicznej.

Logarytmiczna charakterystyka fazowa $\phi(\omega)$ jest zależnością przesunięcia fazowego od częstotliwości przedstawionej w skali logarytmicznej.

Transmitancja widmowa

Przykład:

Wyznaczyć logarytmiczne charakterystyki amplitudową i fazową członu inercyjnego:

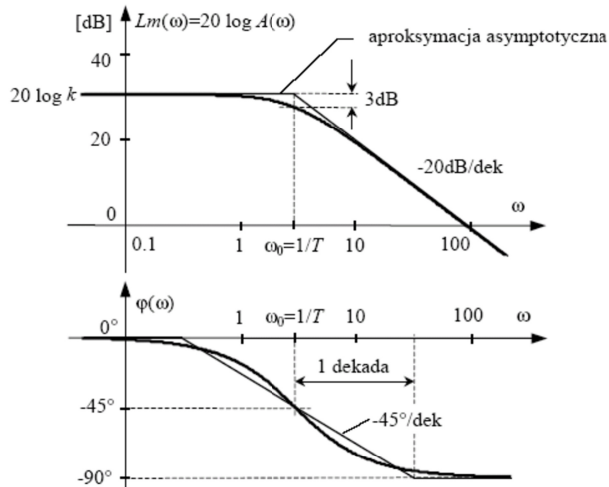
$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$$

Częstotliwość $\omega_0 = 1/T$ nazywana jest **punktem załamania** charakterystyki

$$Lm(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20 \log k - 10 \log(1 + \omega^2 T^2)$$



Transmitancja widmowa

Zastosowanie charakterystyki częstotliwościowej do identyfikacji układu:

Identyfikacja układu na podstawie charakterystyk częstotliwościowych polega na dopasowaniu uzyskanej charakterystyki częstotliwościowej układu do charakterystyki któregoś z członów podstawowych lub ich połączenia.

Charakterystyki logarytmiczne są tu szczególnie przydatne, ponieważ asymptotycznie liniowe przebiegi umożliwiają wychwycenie cech charakterystycznych w całym zakresie częstotliwości i określenie postaci transmitancji układu.

Na podstawie punktów załamania charakterystyk asymptotycznych można z kolei łatwo wyznaczyć wartości parametrów transmitancji.

Transmitancja widmowa

Zastosowanie charakterystyki częstotliwościowej do identyfikacji układu: **Układy pierwszego rzędu**

Charakterystyka amplitudowa:

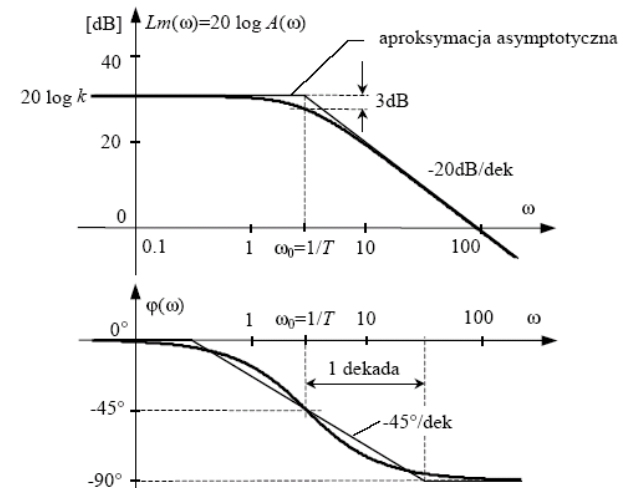
- przy małych częstotliwościach ($\omega \rightarrow 0$) wzmacnienie jest stałe.
- po przekroczeniu częstotliwości granicznej zaczyna spadać z nachyleniem -20 dB/dekadę .

Charakterystyka fazowa:

- przy małych częstotliwościach faza $\approx 0^\circ$.
- w okolicy częstotliwości granicznej faza szybko przechodzi do -90° .

Transmitancja widmowa

Zastosowanie charakterystyki częstotliwościowej do identyfikacji układu: **Układy pierwszego rzędu**



Transmitancja widmowa

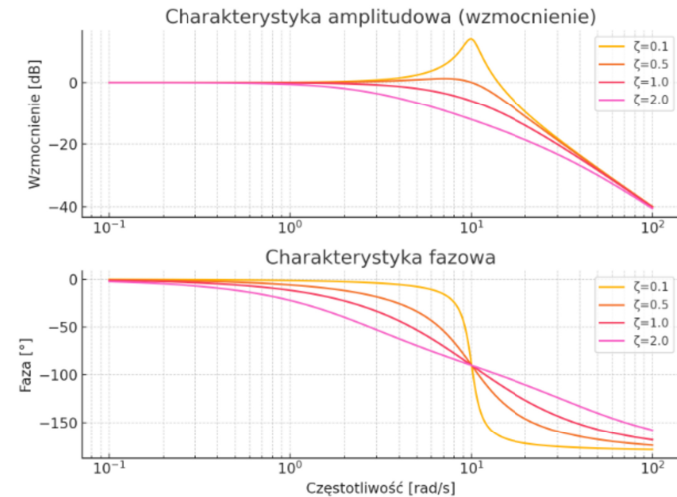
Zastosowanie charakterystyki częstotliwościowej do identyfikacji układu: **Układy drugiego rzędu**

Charakterystyka amplitudowa:

- Może mieć maksimum rezonansowe, jeśli układ jest słabo tłumiony.
- po przekroczeniu częstotliwości granicznej zaczyna spadać z nachyleniem -40 dB/dekadę.

Charakterystyka fazowa:

- przy małych częstotliwościach faza $\approx 0^\circ$.
- pobliżu częstotliwości rezonansowej szybko się zmienia.
- dąży do -180° dla bardzo dużych częstotliwości.

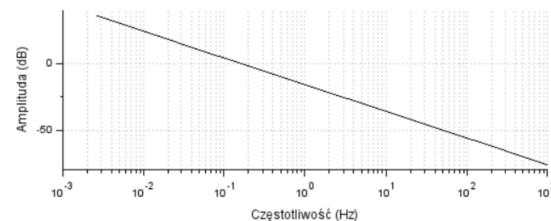


Transmitancja widmowa

Zastosowanie charakterystyki częstotliwościowej do identyfikacji układu: **Układy całkujące**

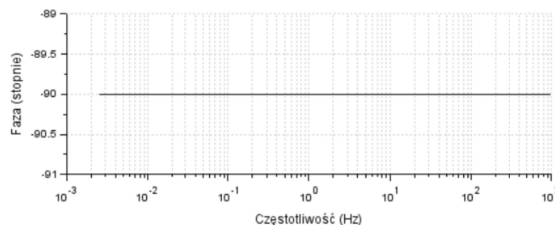
Charakterystyka amplitudowa:

- wzmocnienie spada o -20 dB/dekadę od początku.



Charakterystyka fazowa:

- faza od początku wynosi -90° i nie zmienia się.

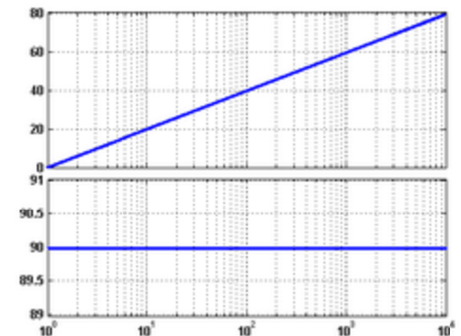


Transmitancja widmowa

Zastosowanie charakterystyki częstotliwościowej do identyfikacji układu: **Układy różniczkujące**

Charakterystyka amplitudowa:

- rośnie o +20 dB/dekadę (w przeciwieństwie do układów całkujących).



Charakterystyka fazowa:

- faza jest stała na poziomie $+90^\circ$.

Transmitancja widmowa

Zastosowanie charakterystyki częstotliwościowej do identyfikacji układu:

- Jeżeli lewostronna (niskoczęstotliwościowa) część charakterystyki amplitudowej osiąga asymptotycznie nachylenie $-n \cdot 20\text{dB/dek}$, to w transmitancji układu występuje n członów całkujących.
- Zmiana nachylenia charakterystyki asymptotycznej o -20dB/dek w punkcie ω_0 oznacza występowanie inercyjnej stałej czasowej $T=1/\omega_0$ (zmiana o -40dB/dek wskazuje na obecność dwóch jednakowych lub bliskich stałych czasowych itd.).
- Jeżeli zmianie nachylenia o -40dB/dek towarzyszy pik rezonansowy, to w mianowniku występuje człon oscylacyjny (na podstawie wysokości piku można ocenić współczynnik tłumienia).