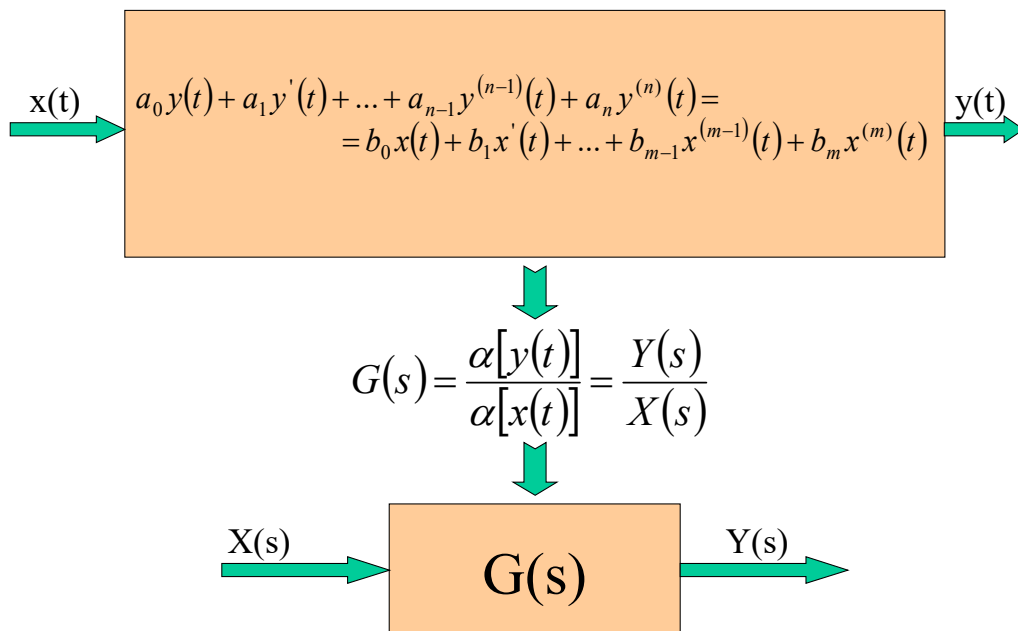


# Automatyka i Robotyka

WYKŁAD  
 PODSTAWOWE CZŁONY DYNAMICZNE  
 CHARAKTERYSTYKI DYNAMICZNE ELEMENTÓW I UKŁADÓW

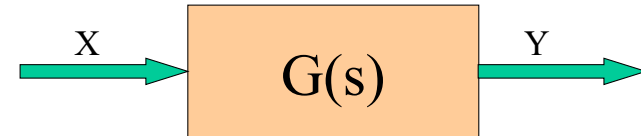
Edward  
 Tertel  
 dr inż.

## Człony automatyki - sposoby opisu



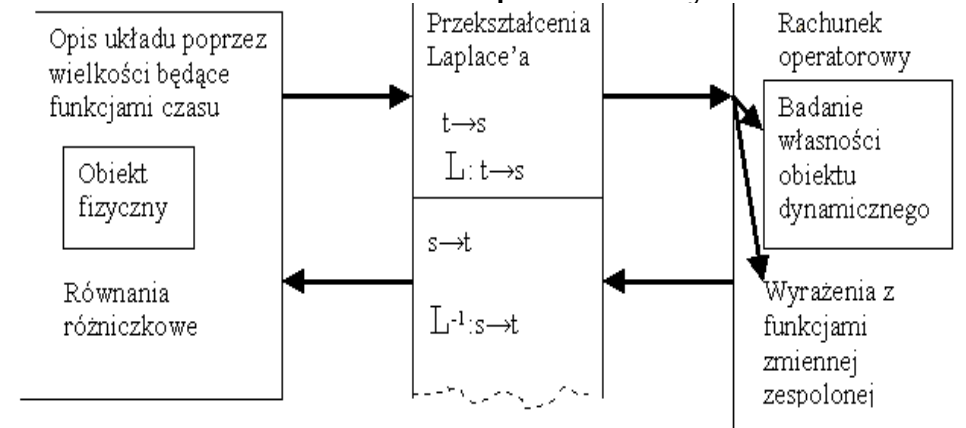
## Człony automatyki

Członem automatyki nazywany jest dowolny układ fizyczny, w którym wyodrębnione są: wielkość wejściowa (sygnał wejściowy) i wielkość wyjściowa (sygnał wyjściowy).



W układach sterowania (regulacji) można wydzielić tzw. człony podstawowe, w których zależności między wejściem i wyjściem są opisywane pewnymi typowymi równaniami.

## Rachunek operatorowy



$$F(s) = \alpha[f(t)] \Rightarrow f(t) = \alpha^{-1}[F(s)]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot X(s) \Rightarrow y(t) = \alpha^{-1}[G(s) \cdot X(s)]$$

$$X(s) = Y(s)/G(s) \Rightarrow x(t) = \alpha^{-1}[Y(s)/G(s)]$$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

*Def.:*

*Charakterystyką czasową układu nazywamy przebieg w czasie odpowiedzi układu na określony sygnał wejściowy, podany na wejście układu będącego w stanie równowagi.*

Typy charakterystyk czasowych:

1. Skokowa,
2. Impulsowa,
3. Liniowo-czasowa.

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Charakterystyka skokowa:

jest to odpowiedź  $y(t)=h(t)$  układu, na którego wejście doprowadzony został sygnał skokowy  $x(t)$  opisany równaniem:

$$x(t) = a \cdot 1(t)$$

gdzie funkcja skoku jednostkowego:

Transformata wymuszenia skokowego ma postać:

$$X(s) = a/s$$

Odpowiedź skokowa:

$$h(t) = \alpha^{-1} [G(s) \cdot X(s)] = \alpha^{-1} [G(s) \cdot a/s]$$

Tabela 2. Wybrane transformaty Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
1. $\delta(t)$ (impuls jednostkowy)	1
2. $1(t)$ (skok jednostkowy)	$\frac{1}{s}$
3. $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \cdot 1(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$
4. $t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5. $\frac{1}{2} t^2 \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^3}$
6. $\frac{1}{n!} t^n \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
7. $e^{\sigma t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s - \sigma}$
8. $t e^{\sigma t} \cdot 1(t)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2}$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Charakterystyka impulsowa:

jest to odpowiedź  $y(t)=k(t)$  układu, na którego wejście doprowadzony został sygnał w postaci impulsu Diraca  $x(t)=\delta(t)$  (impuls o jednostkowej energii, nieskończonej amplitudzie i nieskończenie krótkim czasie trwania):

$$x(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Transformata:  $X(s) =$

Odpowiedź impulsowa:  $k(t) =$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Charakterystyka liniowo-czasowa:

jest to odpowiedź  $y(t)=v(t)$  układu, na którego wejście doprowadzony został sygnał  $x(t)$  liniowo zależny od czasu:

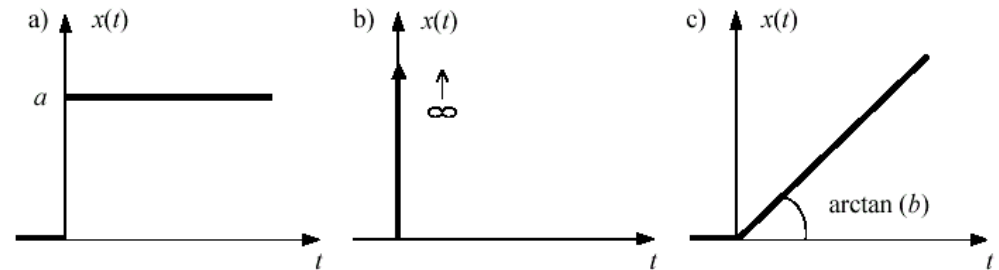
$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ b \cdot t & t \geq 0 \end{cases}$$

Transformata:  $X(s)=$

Odpowiedź impulsowa:  $v(t) =$

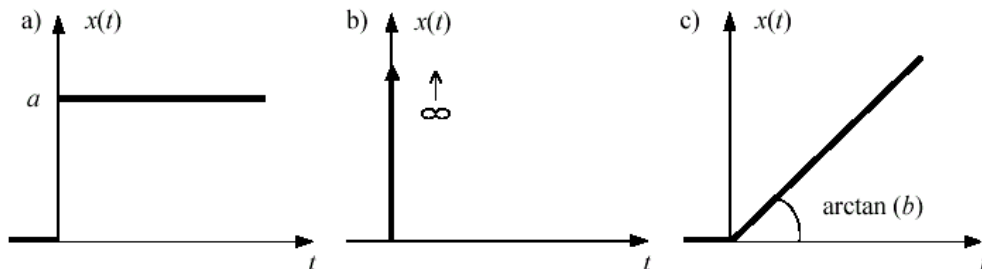
## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Przebiegi sygnałów wymuszających:



## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Przebiegi sygnałów wymuszających:



Sygnał  $x(t)$  podawany na wejście układu w celu uzyskania charakterystyki:

a) skokowej

b) impulsowej

c) liniowo-czasowej

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon proporcjonalny (bezinercyjny)

Równanie dynamiki:  $y=k \cdot x$

Transformacja:  $Y(s)=k X(s)$

Transmitancja:  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$

$k$  - współczynnik wzmocnienia, określony jako stosunek odpowiedzi do wymuszenia.

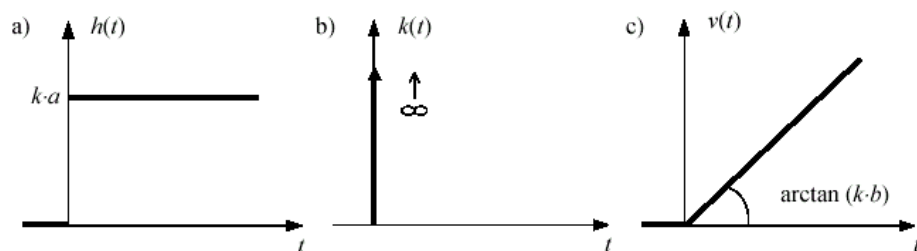
*W członie proporcjonalnym w każdej chwili czasu sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do sygnału wejściowego.*

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

**Człon proporcjonalny (bezinercyjny)**  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$

Charakterystyki czasowe dane są wzorami:

- skokowa  $H(s) = k \frac{a}{s}, \quad h(t) = k \cdot a \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa  $K(s) = k, \quad k(t) = k \cdot \delta(t)$
- liniowo-czasowa  $V(s) = k \frac{b}{s^2}, \quad v(t) = k \cdot b \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$



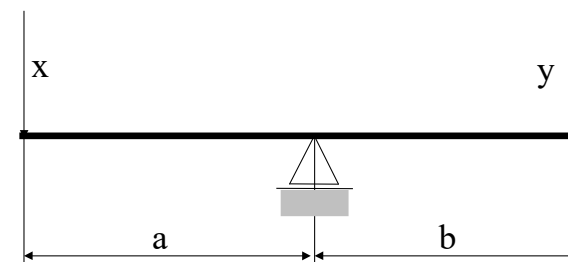
Rys.1.2. Charakterystyki czasowe członu proporcjonalnego  
a) skokowa b) impulsowa c) liniowo-czasowa

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

**Człon proporcjonalny (bezinercyjny)**  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$

Przykład:

sygnały: 1-przesunięcia, 2-siły



## Człony automatyki – charakterystyki czasowe

### Człon całkujący

Równanie dynamiki:

$$T \frac{dy}{dt} = x \quad \text{lub} \quad \frac{dy}{dt} = kx$$

Transformacja:

Transmitancja:  $G(s) =$

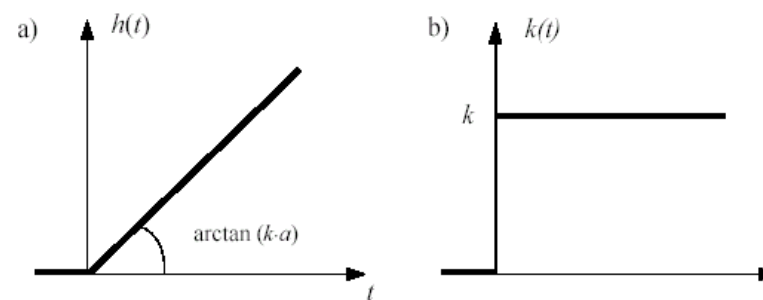
*W członie całkującym sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do całki sygnału wejściowego.*

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon całkujący

Charakterystyki czasowe dane są wzorami:

- skokowa  $H(s) = \frac{k \cdot a}{s^2}, \quad h(t) = k \cdot a \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$
- impulsowa  $K(s) = \frac{k}{s}, \quad k(t) = k \cdot \mathbf{1}(t)$
- liniowo-czasowa  $V(s) = k \frac{b}{s^3}, \quad v(t) = \frac{k \cdot b}{2} \cdot t^2 \cdot \mathbf{1}(t)$



## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon całkujący

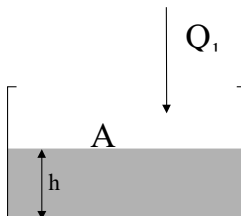
**Przykład:** zbiornik cieczy bez wypływu.

Sygnał wejściowy: natężenie dopływu cieczy,

Sygnał wyjściowy: poziom cieczy.

Podstawowe równania dynamiki:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_I$$



Po transformacji:

$$AsH(s) = Q_I(s)$$

Transmitancja:

$$G = \frac{H(s)}{Q_I(s)} = \frac{1}{As} = \frac{1/A}{s}$$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon inercyjny

Równanie dynamiki:

$$T \frac{dy}{dt} + y = kx$$

Transformacja:

Transmitancja:  $G(s) =$

*Odpowiedź czasowa członu na skutek pewnej bezwładności (inercji) charakteryzuje się występowaniem stanu przejściowego, po zaniknięciu którego sygnał wyjściowy staje się proporcjonalny do sygnału wejściowego (ze współczynnikiem proporcjonalności k).*

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon inercyjny

Charakterystyki czasowe dane są wzorami:

$$H(s) = \frac{k}{(Ts+1)s}, \quad h(t) = k \cdot a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$K(s) = \frac{k}{Ts+1}, \quad k(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$V(s) = \frac{k \cdot b}{s^2(Ts+1)}, \quad v(t) = k \cdot b \cdot \left[ t - T \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right] \cdot \mathbf{1}(t)$$

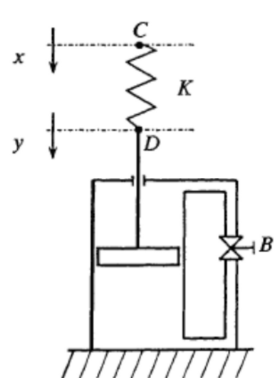
Stała czasowa  $T$  charakteryzuje *prędkość zmian przebiegu przejściowego*. Jest to czas, po upływie którego odpowiedź skokowa osiąga wartość  $0.632 \cdot k \cdot a$ .

Tabela 2. Wybrane transformaty Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
1. $\delta(t)$ (impuls jednostkowy)	1
2. $\mathbf{1}(t)$ (skok jednostkowy)	$\frac{1}{s}$
3. $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}$
4. $t \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5. $\frac{1}{2} t^2 \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s^3}$
6. $\frac{1}{n!} t^n \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
7. $e^{\sigma t} \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s - \sigma}$
8. $te^{\sigma t} \cdot \mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{(s - \sigma)^2}$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon inercyjny



$$K(x-y) = B \frac{dy}{dt}$$

Po przekształceniu

$$\frac{B}{K} \frac{dy}{dt} + y = x,$$

następnie, posługując się przekształceniami Laplace'a, otrzymujemy transmitancję operatorową

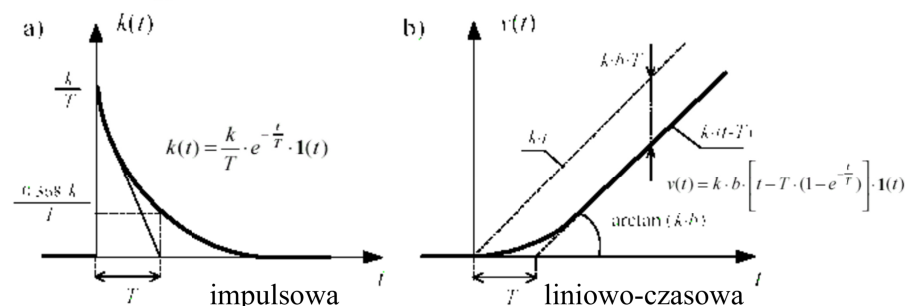
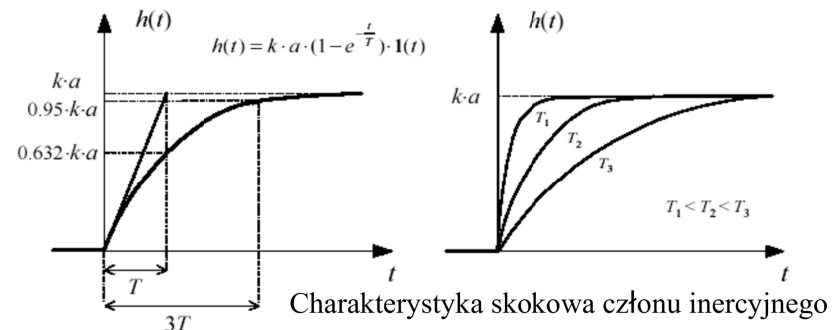
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\frac{B}{K}s + 1},$$

gdzie  $\frac{B}{K} = T$  – stała czasowa.

Stała czasowa  $T$  charakteryzuje *prędkość zmian przebiegu przejściowego*. Jest to czas, po upływie którego odpowiedź skokowa osiąga wartość  $0.632 \cdot k \cdot a$ .

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon inercyjny



## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon inercyjny

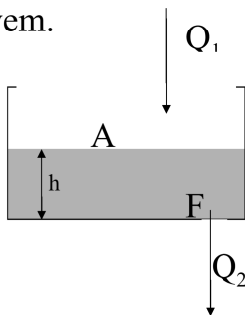
**Przykład:** zbiornik cieczy ze swobodnym wypływem.

Sygnał wejściowy: natężenie dopływu cieczy,

Sygnał wyjściowy: poziom cieczy.

Podstawowe równania dynamiki:

$$A \frac{dh}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad Q_2 = aF \sqrt{2gh(t)}$$



Po linearyzacji:

$$Q_1 = Bh + A \frac{dh}{dt} \quad B = F \sqrt{\frac{g}{2h_0}}$$

Transmitancja:

$$G = \frac{1/B}{As/B + 1} = \frac{k}{Ts + 1}$$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon różniczkujący (idealny)

Równanie dynamiki:

$$y = k \frac{dx}{dt}$$

Transformacja:

Transmitancja:  $G(s) =$

W członie różniczkującym idealnym *sygnał wyjściowy jest proporcjonalny do pochodnej sygnału wejściowego względem czasu*.

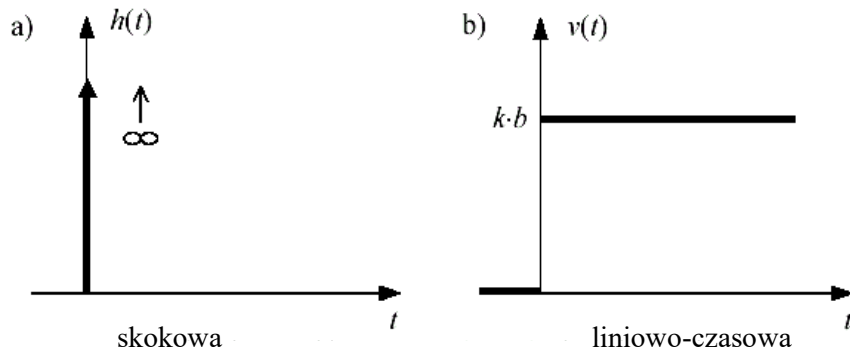
## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon różniczkujący (idealny)

Charakterystyki czasowe dane są wzorami:

$$H(s) = ka, \quad h(t) = k \cdot a \cdot \delta(t)$$

$$V(s) = k \frac{b}{s}, \quad v(t) = k \cdot b \cdot 1(t)$$



## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon różniczkujący z inercją (rzeczywisty)

Równanie dynamiki:

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{dx}{dt}$$

Transformacja:

Transmitancja:  $G(s) =$

*Człon różniczkujący rzeczywisty odpowiada układowi złożonemu z szeregowo połączonych członów: inercyjnego i różniczkującego idealnego. Ma on duże znaczenie praktyczne, gdyż każdy fizycznie realizowalny człon różniczkujący posiada pewną inercję.*

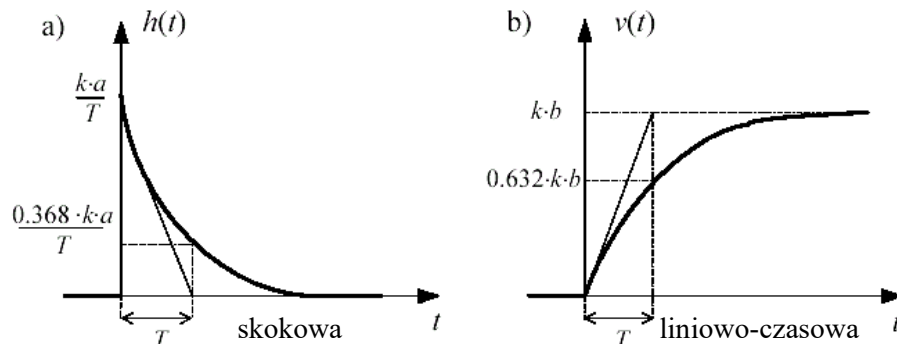
## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon różniczkujący z inercją (rzeczywisty)

Charakterystyki czasowe dane są wzorami:

$$H(s) = \frac{k \cdot a}{Ts + 1}, \quad h(t) = \frac{k \cdot a}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t)$$

$$V(s) = \frac{k \cdot b}{s(Ts + 1)}, \quad v(t) = k \cdot b \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t)$$



## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon różniczkujący z inercją (rzeczywisty)

Charakterystyki czasowe dane są wzorami:



$$Kx = Bv = B \left( \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right),$$

Po uwzględnieniu stałej czasowej  $T = \frac{B}{K}$

$$T \frac{dy}{dx} + y = T \frac{dx}{dt},$$

transmitancja operatorowa ma zatem postać

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1}.$$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon oscylacyjny

Równanie dynamiki:

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = kx$$

Transformacja:

$$T^2 s^2 Y(s) + 2\xi Ts Y(s) + Y(s) = kX(s)$$

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$T = 1/\omega_n$$

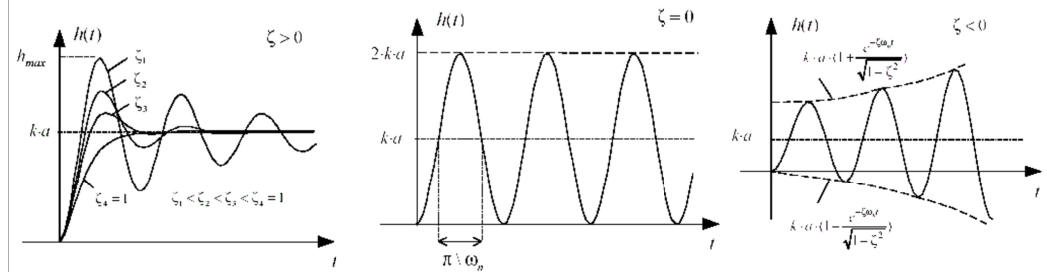
## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon oscylacyjny

Odpowiedź skokowa członu:

$$H(s) = \frac{a \cdot k \cdot \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$h(t) = k \cdot a \cdot \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d \cdot t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \right] \cdot 1(t)$$



## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon oscylacyjny

Odpowiedź impulsowa członu:

$$K(s) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$k(t) = k \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_d \cdot t + \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \cdot 1(t)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

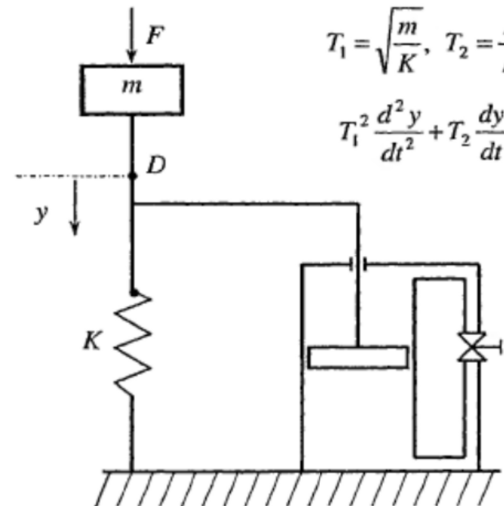
### Człon oscylacyjny

Przykład:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + Ky = mg + F$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{m}{K}}, \quad T_2 = \frac{B}{K}, \quad k = \frac{1}{K}, \quad x = F + mg.$$

$$T_1^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_2 \frac{dy}{dt} + y = kx,$$





## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon opóźniający (opóźnienie transportowe)

Równanie dynamiki:

$$y(t) = kx(t - T_o)$$

Transformacja:

$$Y(s) = ke^{-sT_o} X(s)$$

Transmitancja:

$$G(s) = ke^{-sT_o}$$

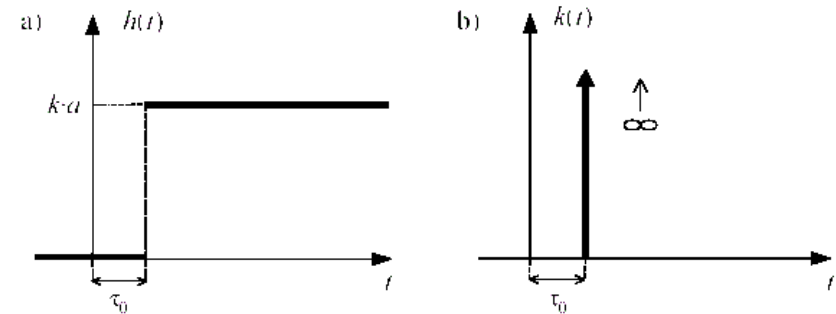
Sygnał na wyjściu członu opóźniającego jest równy sygnałowi wejściowemu, ale pojawia się nie w chwili doprowadzenia sygnału wejściowego, lecz po upływie czasu  $T_o$ .

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon opóźniający (opóźnienie transportowe)

Charakterystyki czasowe dane są wzorami:

- skokowa	$H(s) = \frac{k \cdot a}{s} e^{-\tau_o s}$	$h(t) = k \cdot a \cdot \mathbf{I}(t - \tau_o)$
- impulsowa	$K(s) = k \cdot e^{-\tau_o s}$	$k(t) = k \cdot \delta(t - \tau_o)$
- liniowo-czasowa	$V(s) = \frac{k \cdot b}{s^2} e^{-\tau_o s}$	$v(t) = k \cdot b \cdot (t - \tau_o) \cdot \mathbf{I}(t - \tau_o)$

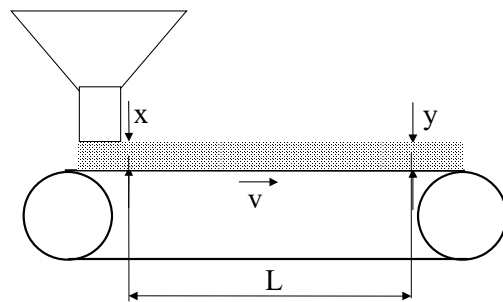


## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Człon opóźniający (opóźnienie transportowe)

Przykład:

x – grubość warstwy na początku taśmy – sygnał wejściowy  
y – grubość warstwy na końcu taśmy – sygnał wyjściowy



Elementy z opóźnieniem występują tam, gdzie mamy do czynienia z transportem materiałów lub przesyłem sygnałów w liniach sygnałowych.

## Człony automatyki - charakterystyki czasowe

### Podsumowanie:

Sposób opisu danego elementu rzeczywistego zależy od przyjętych założeń, a te z kolei od istotności zjawisk fizycznych zachodzących w danym układzie.

Dokonując opisu elementów i układów automatyki należy pamiętać o pewnych prawidłowościach:

1. Uwzględnienie masy i objętości wraz z oporem daje transmitancje członów inercyjnych lub oscylacyjnych,
2. Uwzględnienie tylko pojemności z oporem prowadzi do transmitancji inercyjnych lub całkujących,
3. Pominięcie masy, pojemności i oporu daje człon o transmitancji proporcjonalnej.

Za pomocą typowych członów automatyki można opisywać właściwości tych wszystkich urządzeń, których równania dynamiki są liniowe, lub dają się zlinearyzować.